บทความวิจัย

# ผลเฉลยของสองสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$

**จันทนา วรรณพันธุ์ และสุธน ตาดี***
*สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี*
**Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th*

รับบทความ: 4 มิถุนายน 2565 แก้ไขบทความ: 1 กรกฎาคม 2565 ยอมรับตีพิมพ์: 13 กรกฎาคม 2565

## บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ แสดงว่า ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ อยู่ในรูป

$$(n,x,y,z) \in \{(1,a,3,3) | a \in \mathbb{Z}, a \geq 0\} \cup \{(b,0,3,3) | b \in \mathbb{Z}, b > 1\} \cup \{(2^{c-2}-1, 1, c, 2^{c-2}+1) \ | c \in \mathbb{Z}, c > 3\}$$

และผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ อยู่ในรูป

$$(n,x,y,z) \in \{(1,d,0,0) | \ d \in \mathbb{Z}, d \geq 0\} \cup \{(e,0,0,0) | \ e \in \mathbb{Z}, e > 1\} \cup \left\{\left(2^{f-2}+1, 1, f, 2^{f-2}-1\right) \ \middle| \ f \in \mathbb{Z}, f > 3\right\} \cup \{(3,1,3,1), (3,2,5,7)\}$$

**คำสำคัญ**: สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

**อ้างอิงบทความนี้**
จันทนา วรรณพันธุ์ และสุธน ตาดี. (2565). ผลเฉลยของสองสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$. **วารสารวิทยาศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษา**, 5(2), 236-240. http://doi.org/10.14456/jsse.2022.27

Research Article

# On the Solutions of Two Diophantine Equations $n^{2x} + 2^y = z^2$ and $n^{2x} - 2^y = z^2$

**Chantana Wannaphan and Suton Tadee***

*Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University, Lopburi*

**Email: suton.t@lawasri.tru.ac.th*

Received <4 June 2022>; Revised <1 July 2022>; Accepted <13 July 2022>

## Abstract

In this paper, we show that all non-negative integer solutions of the Diophantine equation $n^{2x} + 2^y = z^2$ where $n$ is an odd positive integer, are of the following form

$$(n,x,y,z) \in \{(1,a,3,3) | a \in \mathbb{Z}, a \geq 0\} \cup \{(b,0,3,3) | b \in \mathbb{Z}, b > 1\} \cup \{(2^{c-2}-1, 1, c, 2^{c-2}+1) \ | c \in \mathbb{Z}, c > 3\}.$$

All non-negative integer solutions of the Diophantine equation $n^{2x} - 2^y = z^2$ where $n$ is an odd positive integer, are of the following form

$$(n,x,y,z) \in \{(1,d,0,0) | \ d \in \mathbb{Z}, d \geq 0\} \cup \{(e,0,0,0) | \ e \in \mathbb{Z}, e > 1\} \cup \left\{\left(2^{f-2}+1, 1, f, 2^{f-2}-1\right) \ \middle| \ f \in \mathbb{Z}, f > 3\right\} \cup \{(3,1,3,1), (3,2,5,7)\}.$$

**Keywords**: Diophantine equation, non-negative integer solution

**Cite this article:**

Wannaphan, C. and Tadee, S. (2022). On the Solutions of Two Diophantine Equations $n^{2x} + 2^y = z^2$ and $n^{2x} - 2^y = z^2$ (in Thai). **Journal of Science and Science Education**, 5(2), 236-240. http://doi.org/10.14456/jsse.2022.27

## บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation) เป็นอีกสมการหนึ่งที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่างๆ ได้ (Dhurga, 2021; Anbuselvi and Sivasankari, 2019; Kaur and Sambhor, 2017) โดยสมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการพหุนาม (Polynomial Equation) ประเภทหนึ่งที่พิจารณาหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น และสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบหนึ่งที่ได้รับความสนใจ คือ

$$a^x + b^y = z^2 \tag{1}$$

เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x, y, z,$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวอย่างเช่น ในปี ค.ศ. 2007 Acu (2007) ได้พบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 5^y = z^2$ มีเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (2, 1, 3)\}$ และในปี ค.ศ. 2011 Suvarnamani *et al.* (2011) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + 7^y = z^2$ และ $4^x + 11^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ต่อมา Chotchaisthit (2012) ได้แสดงว่าผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ เมื่อ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ อยู่ในรูป $(x, p, y, z) \in \{(2, 3, 2, 5)\} \cup \{(r, 2^{r+1} + 1, 1, 2^r + 1) | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(r, 2, 2r + 3, 3 \cdot 2^r) | r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ และในปีถัดมา Chotchaisthit (2013) ได้แสดงว่า $(x, y, z) = (3, 0, 3)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 11^y = z^2$ และ Sroysang (2013) ได้พิสูจน์ว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีเพียงสามผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y, z) \in \{(0, 1, 2), (3, 0, 3), (4, 2, 5)\}$ หลังจากนั้น Tanakan (2014) ได้พบว่า $(x, y, z) = (0, 3, 3)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x + 2^y = z^2$ และ Qi and Li (2015) ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $8^x + p^y = z^2$ เมื่อ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ และในปี ค.ศ. 2016 Khan *et al.* (2016) ได้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 9^y = z^2$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงสองผลเฉลย คือ $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (4,1,5)\}$ และ Rabago (2016) ได้พบว่า $(x, y, z) \in \{(3, 1, 5), (5,1,7), (6,1,9), (7,3,71), (9,1,23)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 17^y = z^2$ นอกจากนี้ Puangjumpa (2016) ได้พบว่า $(x, y, z) \in \{(3, 0, 3), (1,1,7)\}$ เป็นผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + 47^y = z^2$ และเมื่อไม่นานมานี้ Burshtein (2018a) ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $2^{2x+1} + 7^{2n} = z^2$ เมื่อ $x, n$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $z$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ พบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, n, z) = (2, 1, 9)$ และ Burshtein (2018b) ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$เมื่อ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลงานวิจัยที่ได้ยกตัวอย่างมาข้างต้น สังเกตได้ว่าจะกำหนดให้ $a$ และ $b$ ในสมการ (1) อยู่ในรูป $p^k$ เมื่อ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น ในงานวิจัยนี้จะขยายผลให้กว้างขึ้น โดยที่ $a$ ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปดังกล่าว นอกจากนี้จะศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปผลต่างด้วย

## วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

## วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้จะเริ่มจากการนำเสนอ 2 ทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของงานวิจัย หลังจากนั้นจะศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x} + 2^y = z^2$ และ $n^{2x} - 2^y = z^2$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ตามลำดับ

**ทฤษฎีบท 1 (Mihailescu, 2004)** สมการไดโอแฟนไทน์

$$a^x - b^y = 1 \tag{2}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$ เมื่อ $a, b, x, y$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$

**ทฤษฎีบท 2 (Tanakan, 2014)** สมการไดโอแฟนไทน์

$$1 + 2^y = z^2 \tag{3}$$

มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(y, z) = (3, 3)$

**ทฤษฎีบท** 3 ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$n^{2x} + 2^y = z^2 \tag{4}$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, y, z) \in A \cup B \cup C$
เมื่อ $A = \{(1, a, 3, 3) | a \in \mathbb{Z}, a \geq 0\}, B = \{(b, 0, 3, 3) | b \in \mathbb{Z}, b > 1\}$
และ $C = \{(2^{c-2} - 1, 1, c, 2^{c-2} + 1) \ | c \in \mathbb{Z}, c > 3\}$

**พิสูจน์** สมมติว่า $x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของ (4) ถ้า $n = 1$ จาก (4) และทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(n, x, y, z) \in A$ และถ้า $x = 0$ จาก (4) และทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $(n, x, y, z) \in B$ ดังนั้นเหลือพิจารณากรณีที่ $n > 1$ และ $x > 0$ จาก (4) จะได้ว่า

$$2^y = z^2 - n^{2x} = (z - n^x)(z + n^x) \tag{5}$$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $u$ ที่ทำให้

$$z - n^x = 2^u \tag{6}$$

และ

$$z + n^x = 2^{y-u} \tag{7}$$

จาก (6) และ (7) จะได้ว่า $y > 2u$ และ

$$2n^x = 2^u(2^{y-2u} - 1) \tag{8}$$

จาก (8) และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังนั้น $u = 1$ ทำให้

$$2^{y-2} - n^x = 1 \tag{9}$$

จาก (9) จะได้ว่า $y > 2$ และถ้า $y = 3$ จาก (9) จะได้ว่า $n^x = 1$ และจาก $n > 1$ ดังนั้น $x = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $x > 0$ เพราะฉะนั้น $y > 3$ และจาก $n > 1$ ดังนั้น ถ้า $x > 1$ แล้ว $\min\{2, n, y - 2, x\} > 1$ และจากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า (9) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $x \leq 1$ และจาก $x > 0$ จะได้ว่า $x = 1$ และจาก (9) ทำให้ $n = 2^{y-2} - 1$ และจาก (6) จะได้ว่า $z = 2^{y-2} + 1$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) \in C$ ■

**ทฤษฎีบท** 4 ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว สมการไดโอแฟนไทน์

$$n^{2x} - 2^y = z^2 \tag{10}$$

มีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, y, z) \in D \cup E \cup F \cup G$
เมื่อ $D = \{(1, d, 0, 0) | \ d \in \mathbb{Z}, d \geq 0\}, E = \{(e, 0, 0, 0) | \ e \in \mathbb{Z}, e > 1\}$
$F = \{(2^{f-2} + 1, 1, f, 2^{f-2} - 1) \ | \ f \in \mathbb{Z}, f > 3\}$ และ $G = \{(3, 1, 3, 1), (3,2,5,7)\}$

**พิสูจน์** สมมติว่า $x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและเป็นผลเฉลยของ (10) ถ้า $n = 1$ จาก (10) จะได้ว่า $y = z = 0$ ดังนั้น $(n, x, y, z) \in D$ และถ้า $x = 0$ จาก (10) จะได้ว่า $y = z = 0$ ดังนั้น $(n, x, y, z) \in E$ เพราะฉะนั้นเหลือพิจารณากรณีที่ $n > 1$ และ $x > 0$ จาก (10) จะได้ว่า

$$2^y = n^{2x} - z^2 = (n^x - z)(n^x + z) \tag{11}$$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ $v$ ที่ทำให้

$$n^x - z = 2^v \tag{12}$$

และ

$$n^x + z = 2^{y-v} \tag{13}$$

จาก (12) และ (13) จะได้ว่า $y > 2v$ และ

$$2n^x = 2^v(2^{y-2v} + 1) \tag{14}$$

จาก (14) และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังนั้น $v = 1$ ทำให้

$$n^x - 2^{y-2} = 1 \tag{15}$$

จาก (15) จะได้ว่า $y > 2$ และถ้า $y = 3$ จาก (15) จะได้ว่า $n^x = 3$ ดังนั้น $n = 3$ และ $x = 1$ และจาก (12) จะได้ว่า $z = 1$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) \in G$ ต่อไปจะพิจารณากรณีที่ $y > 3$ ถ้า $x = 1$ จาก (15) จะได้ว่า $n = 2^{y-2} + 1$ และจาก (12) จะได้ว่า $z = 2^{y-2} - 1$ เพราะฉะนั้น $(n, x, y, z) \in F$ และถ้า $x > 1$ จาก $y > 3$ , $n > 1$ และ (15) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $n = 3$ , $x = 2$, $y = 5$ และจาก (12) จะได้ว่า $z = 7$ ดังนั้น $(n, x, y, z) \in G$ ■

## ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^{2x}+2^y=z^2$ และ $n^{2x}-2^y=z^2$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังปรากฏในทฤษฎีบท 3 และ 4 ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่า $n$ ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูป $p^k$ เมื่อ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจึงเป็นการขยายผลงานวิจัยก่อนหน้านี้ให้กว้างขึ้น และสิ่งที่น่าสนใจต่อไปคือการหาผลเฉลยของสองสมการดังกล่าวในกรณีที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และที่น่าสนใจยิ่งไปกว่านั้น คือ การหาแสดงผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x+2^y=z^2$ และ $n^x-2^y=z^2$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ สถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยครั้งนี้

## เอกสารอ้างอิง

Acu, D. (2007). On a Diophantine equation $2^x+5^y=z^2$. **General Mathematics,** 15(4), 145-148.

Anbuselvi, R. and Sivasankari, J. (2019). Applications of Diophantine equations in chemical equations. **Journal of Emerging Technologies and Innovative Research,** 6(6), 371-373.

Burshtein, N. (2018a). On the Diophantine equation $2^{2x+1}+7^y=z^2$. **Annals of Pure and Applied Mathematics,** 16(1), 177-179. doi: 10.22457/apam.v16n1a19

Burshtein, N. (2018b). Solutions of the Diophantine equation $2^x+p^y=z^2$ when $p$ is prime. **Annals of Pure and Applied Mathematics,** 16(2), 471-477. doi: 10.22457/apam.v16n2a25

Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine equation $4^x+p^y=z^2$ where $p$ is a prime number. **American. Jr. of Mathematics and Sciences,** 1(1), 191-193.

Chotchaisthit, S. (2013). On the Diophantine equation $2^x+11^y=z^2$. **Maejo International Journal of Science and Technology,** 7(2), 291-293.

Dhurga, C.K. (2021). A linear Diophantine equation and its real life applications. **Advances and Applications in Mathematical Sciences,** 20(8), 1389-1394.

Kaur, D. and Sambhor, M. (2017). Diophantine equations and its applications in real life. **International Journal of Mathematics and its applications**, 5(2), 217-222.

Khan, M.A.A., Rashid, A. and Uddin, M.S. (2016). Non-negative integer solutions of two Diophantine equations $2^x+9^y=z^2$ and $5^x+9^y=z^2$. **Journal of Applied Mathematics and Physics,** 4, 762-765. doi: 10.4236//jamp.2016.44086

Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. **Journal für die Reine und Angewante Mathematik,** 27, 167-195.

Puangjumpa, P. (2016). Possible solution of the Diophantine equation $2^x+47^y=z^2$. **Academic Journal URU,** 11(3S), 36-42.

Qi, L. and Li, X. (2015). The Diophantine equation $8^x+p^y=z^2$. **The Scientific World Journal**, Article ID 306590, 3 pages. doi: 10.1155/2015/306590

Rabago, J.F.T. (2016). On the Diophantine equation $2^x+17^y=z^2$. **Journal of the Indonesian Mathematical Society,** 22(2), 177-181.

Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine equation $2^x+3^y=z^2$. **International Journal of Pure and Applied Mathematics,** 84(2), 133-137. doi: 10.12732/ijpam.v84i2.11

Suvarnamani, A., Singta, A. and Chotchaisthit, S. (2011). On two Diophantine equations $4^x+7^y=z^2$ and $4^x+11^y=z^2$. **Science and Technology RMUTT Journal**, 1(1), 25-28.

Tanakan, S. (2014). On the Diophantine equation $19^x+2^y=z^2$. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, 9(4), 159-162. doi: 10.12988/ijcms.2014.418