



Geometric Thinking and Mathematical Understanding on the Topic of Geometric Transformations of Mathayomsuksa 2 Students Using GeoGebra Software

Nitikorn Laothaworn¹, Moeiwadee Butchamruan¹ and Panadda Sangsrikaew^{2*}

¹*Bachelor of Education in Learning Management Innovation, Major in Mathematics*

Faculty of Education and Educational Innovation, Kalasin University

²*Faculty of Education and Educational Innovation, Kalasin University*

**Email: panadda.sa@ksu.ac.th*

Received <7 January 2025>; Revised <17 February 2025>; Accepted <28 February 2025>

Abstract

This research aimed to 1) compare the geometric thinking on geometric transformations of Mathayomsuksa 2 students who received instruction using GeoGebra with a criterion of 75%, 2) compare the mathematical understanding of geometric transformations of Mathayomsuksa 2 students who received instruction using GeoGebra with a criterion of 75%, and 3) examine the attitudes of Mathayomsuksa 2 students after learning through GeoGebra. The sample used in this research consisted of 156 Mathayomsuksa 2 students from Anukoolnaree School, Kalasin Province, selected through simple random sampling. The research instruments included: Lesson plans on geometric transformations 12 lesson plans Geometric thinking and mathematical understanding tests Student attitude questionnaire Data were analyzed using basic statistical methods, including: Mean ($\bar{X}$), Standard deviation (S.D.), Percentage and t-test for one sample. The research findings revealed that the Geometric thinking of Mathayomsuksa 2 students who received instruction using GeoGebra was 81.33%, which was significantly higher than the 75% criterion at the .01 level. Additionally, students demonstrated geometric thinking at all levels above the 75% criterion, with statistical significance at the .01 level. The mathematical understanding of students who learned using GeoGebra was 82.81%, which was significantly higher than the 75% criterion at the .01 level, aligning with the research hypothesis. When analyzed by specific aspects, it was found that students had the highest level of mathematical understanding at the action level (84.78%), followed by the process level (83.33%), the cognitive structure level (82.85%), and the object level (80.29%), respectively. Students' attitudes were at the highest level overall ($\bar{X}$ = 4.72, S.D. = 0.51).

Keywords: Geometric thinking; Mathematical understanding; GeoGebra

การคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

นิติกร เหล่าถาวร¹ เมยวดี บุตรจำรวญ¹ และ ปณิดดา สังข์ศรีแก้ว^{2*}

¹ครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาบัณฑิตนวัตกรรมการจัดการเรียนรู้ วิชาเอกคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์และนวัตกรรมการศึกษา มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์

²คณะศึกษาศาสตร์และนวัตกรรมการศึกษา มหาวิทยาลัยกาฬสินธุ์

*Email: panadda.sa@ksu.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ 1) เพื่อเปรียบเทียบการคิดเชิงเรขาคณิต เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 2) เพื่อเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 และ 3) เพื่อศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอนุบาลกาฬสินธุ์ จำนวน 156 คน ที่ได้มาจากการสุ่มอย่างง่าย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต จำนวน 12 แผน แบบทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ แบบวัดเจตคติ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ร้อยละ และการทดสอบที (t-test for one sample) ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra คิดเป็นร้อยละ 81.33 สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตทุกระดับสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra มีคะแนนเป็นร้อยละ 82.81 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ และเมื่อพิจารณารายด้าน พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับการกระทำ สูงสุด ร้อยละ 84.78 รองลงมา คือระดับกระบวนการ ร้อยละ 83.33 ระดับโครงสร้างทางปัญญา ร้อยละ 82.85 และระดับวัตถุ ร้อยละ 80.29 ตามลำดับ และเจตคติของนักเรียน ในภาพรวมอยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{x}$ = 4.72, S.D. = 0.51)

คำสำคัญ: การคิดเชิงเรขาคณิต; ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์; GeoGebra

บทนำ

ปัจจุบันความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเป็นปัจจัยสำคัญต่อระบบการศึกษาที่ทันสมัย ช่วยอำนวยความสะดวกให้กับมนุษย์ได้เกิดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นการสะท้อนถึงความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่องและสอดคล้องกับความต้องการเปลี่ยนแปลงของเศรษฐกิจ สังคม และความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว (The institute for the promotion of teaching science and technology, 2017) การส่งเสริมให้ผู้เรียนมีทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 คือ การเตรียมผู้เรียนให้มีทักษะด้านการคิดวิเคราะห์ มีวิจารณญาณ การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ ซึ่งจะส่งผลให้ผู้เรียนรู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงของระบบเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และคณิตศาสตร์มีส่วนสำคัญอย่างมากที่จะทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะในการเรียนรู้ กระบวนการคิด การตัดสินใจ สามารถเชื่อมโยงสิ่งต่าง ๆ ได้ ทั้งนี้การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ประสบความสำเร็จนั้น จะต้องเตรียมผู้เรียนให้มีความพร้อมที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ดังนั้นสถานศึกษาควรจัดการเรียนรู้ให้เหมาะสมตามศักยภาพของผู้เรียน (Ministry of Education, 2017) แต่ในปัจจุบันการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ยังเป็นรูปแบบเดิม คือ ครูผู้สอนมักจะใช้การสอนแบบบรรยายเป็นหลัก จึงทำให้เกิดความท้อแท้ต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน (Thongma, 2018)

จากผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินี้ขั้นพื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2566 มีคะแนนเฉลี่ย ระดับประเทศ เท่ากับ 25.38 คะแนน จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ (National Institute of Educational Testing, 2023) เมื่อศึกษาสภาพปัญหาในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของโรงเรียนอนุบาลนารีพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำกว่าเกณฑ์ร้อยละ 50 โดยเฉพาะเนื้อหาในสาระเรขาคณิต ทั้งนี้อาจเกิดจากการจัดการเรียนการสอนที่สอนตามเอกสาร ไม่มีสื่อหรือเทคโนโลยีที่ให้นักเรียนมองเห็นภาพหรือสอนแค่การอธิบายอย่างเดียว ซึ่งทำให้ผู้เรียนไม่สามารถลงมือปฏิบัติได้จริง ดังนั้น ควรจัดการเรียนการสอนที่สามารถทำให้ผู้เรียนมองเห็นภาพและกระบวนการคิดทั้งด้านการนำเสนอเข้ามามีส่วนร่วมในการจัดการเรียนการสอน และเทคโนโลยีที่ทำให้ผู้เรียนสนใจในวิชาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น

การคิดเชิงเรขาคณิต เป็นการคิดที่ทำให้เริ่มจากการมองเห็นรูปธรรมภายนอก ที่ทำให้ผู้เรียนรับรู้และเข้าใจกับขนาด รูปร่าง ตำแหน่ง ทิศทาง ระยะทาง และเกี่ยวกับสมบัติและวิธีการคิด ทำให้การจัดการเรียนรู้ในเนื้อหาการแปลงทางเรขาคณิตไม่สำเร็จเท่าที่ควร โดย Van Hiele (1986) ได้เสนอโมเดลระดับการคิดทางเรขาคณิต ประกอบด้วยระดับขั้นพื้นฐานหรือขั้น 0 ระดับขั้น การวิเคราะห์หรือขั้น 1 ระดับขั้นการพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผนหรือขั้น 2 ระดับขั้น การพิสูจน์อย่างมีแบบแผนหรือขั้น 3 และระดับขั้นการคิดขั้นสุดหรือขั้น 4 ดังนั้น ครูผู้สอนควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับระดับการคิดทางเรขาคณิต กล่าวคือ นักเรียนต้องผ่านการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตจากขั้นที่ง่ายไปยังขั้นที่สลับซับซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับ Hancherngchai, Inprasitha and Thinwiangthong (2017) กล่าวว่า การที่นักเรียนเน้นท่องจำเนื้อหา ไม่ได้ส่งเสริมให้นักเรียนมีประสบการณ์การคิด ที่เกี่ยวกับการคิดวิเคราะห์ พิสูจน์ให้เหตุผลและความสัมพันธ์ของมิติต่าง ๆ ซึ่งมีผลกระทบต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้น และส่งผลเสียต่อการเรียนรู้ของนักเรียน

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Understanding) เป็นปัจจัยสำคัญที่ช่วยส่งเสริมการเรียนรู้และการประยุกต์ใช้ความรู้ในชีวิตจริง โดยเฉพาะในเรื่องเรขาคณิตที่เน้นการวิเคราะห์เชิงพื้นที่ และการเชื่อมโยงแนวคิดพื้นฐาน เช่น การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformations) ซึ่งครอบคลุมกระบวนการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) การหมุน (Rotation) และการขยายหรือย่อส่วน (Dilation) การแปลงทางเรขาคณิตไม่เพียงแต่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจโครงสร้างของรูปเรขาคณิต แต่ยังช่วยพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงแนวคิด เช่น การใช้ระบบพิกัดในทางคณิตศาสตร์ (Battista, 2007) ทั้งนี้ ความเข้าใจในหัวข้อดังกล่าว ควรพัฒนาผ่านกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการวิเคราะห์ การลงมือปฏิบัติ และการคิดเชิงนามธรรม หนึ่งในทฤษฎีที่ได้รับการยอมรับสำหรับการอธิบายพัฒนาการของความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ คือ ทฤษฎี APOS (Action, Process, Object, and Schema) ซึ่งพัฒนาโดย (Dubinsky, 1991) อธิบายว่าความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์เกิดจากการพัฒนา ผ่าน 4 ขั้นตอน ได้แก่ (1) Action การกระทำ (2) Process กระบวนการ (3) Object วัตถุ และ (4) Schema โครงสร้างปัญญา

GeoGebra เป็นโปรแกรมเทคโนโลยีที่สามารถสร้างรูปทางเรขาคณิตและการแปลงทางเรขาคณิต ช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นรูปทางเรขาคณิตได้อย่างมีมิติมากกว่าการเรียนรู้ในเอกสารประกอบการสอน Champrasert (2014) กล่าวว่า ในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนจำเป็นต้องบูรณาการเทคโนโลยีเข้ากับการสอน เพื่อให้ตอบสนองต่อความต้องการของผู้เรียนในยุคดิจิทัล ซึ่งมีลักษณะการเรียนรู้ที่ยึดตามความสนใจและความชอบส่วนบุคคล บทความนี้จึงมุ่งเน้นการนำเสนอแนวทางการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในยุคดิจิทัล เพื่อให้ครูผู้สอนเข้าใจวิธีการสอนและการใช้เครื่องมือดิจิทัลอย่างมีประสิทธิภาพสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้ และบริหารชั้นเรียนได้อย่างเหมาะสม ผู้วิจัยมองว่าโปรแกรม GeoGebra ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตเชิงพลวัต เป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาเรขาคณิตได้อย่างลึกซึ้ง ส่งเสริมกระบวนการคิดเชิงวิเคราะห์และการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ Hohenwarter and Fuchs (2004) กล่าวว่า โปรแกรม GeoGebra เป็น

โปรแกรมที่รวบรวมเครื่องมือในการสร้างรูปทรงเรขาคณิต พีชคณิต กราฟ สถิติ และแคลคูลัสรวมไว้ในเครื่องมือเดียว ส่งผลให้ผู้เรียนใช้งานได้ง่าย นอกจากนี้ แอปพลิเคชัน GeoGebra ยังให้บริการแก่ผู้ใช้ทุกคนโดยไม่เก็บค่าธรรมเนียม นอกจากนี้ โปรแกรม GeoGebra สามารถช่วยให้นักเรียนเข้าใจ และมองเห็นภาพจากสื่อที่เป็นรูปธรรม สามารถเรียนรู้ด้วยตนเอง สามารถสนับสนุนการเรียนรู้ได้ครบทุกสาระในวิชาคณิตศาสตร์และบูรณาการวิชาอื่นเข้าด้วยกันได้ ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสพัฒนาหุปัญญา อันได้แก่ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ (Phooddee, 2020) และยังเป็นสื่อที่มีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนและสามารถนำไปใช้ได้ผ่านระบบปฏิบัติการใดก็ได้

ผู้วิจัยจึงมุ่งศึกษาการคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ซึ่งการคิดเชิงเรขาคณิต ประกอบด้วย 4 ระดับ คือ ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก ระดับการวิเคราะห์ ระดับนิรนัยแบบไม่เป็นทางการ และระดับนิรนัยแบบเป็นทางการ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 4 ระดับ คือ ระดับการกระทำ ระดับกระบวนการ ระดับวัตถุ และระดับโครงสร้างทางปัญญา ผู้วิจัยหวังว่างานวิจัยนี้จะประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจศึกษาและนำไปพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้สืบต่อไป

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75
2. เพื่อเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75
3. เพื่อศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

วิธีดำเนินการวิจัย

1. แบบแผนการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ เป็นการวิจัยเชิงทดลองเบื้องต้น (Pre-experimental Designs) โดยทำการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียว และทำการทดสอบหลังเรียน (One group posttest design) โดยผู้วิจัยมีระเบียบวิธีการวิจัย ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แบบแผนการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	Treatment	Post – Test
n	X	T ₂

n	แทน	กลุ่มตัวอย่างในการวิจัย
X	แทน	การจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
T ₂	แทน	การทดสอบหลังการทดลอง (Post – Test)

2. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567 โรงเรียนอนุกุลนารี อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ที่ผู้วิจัยรับผิดชอบสอน 7 ห้องเรียน รวมทั้งสิ้น จำนวน 261 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567 โรงเรียนอนุกุลนารี อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ที่ผู้วิจัยรับผิดชอบสอน 7 ห้องเรียน จำนวน 156 คน ที่ได้จากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster Sampling) ดังนี้

- ห้อง 1 จำนวน 39 คน สุ่มอย่างง่ายมา 24 คน
- ห้อง 2 จำนวน 42 คน สุ่มอย่างง่ายมา 25 คน
- ห้อง 3 จำนวน 41 คน สุ่มอย่างง่ายมา 25 คน
- ห้อง 4 จำนวน 34 คน สุ่มอย่างง่ายมา 20 คน

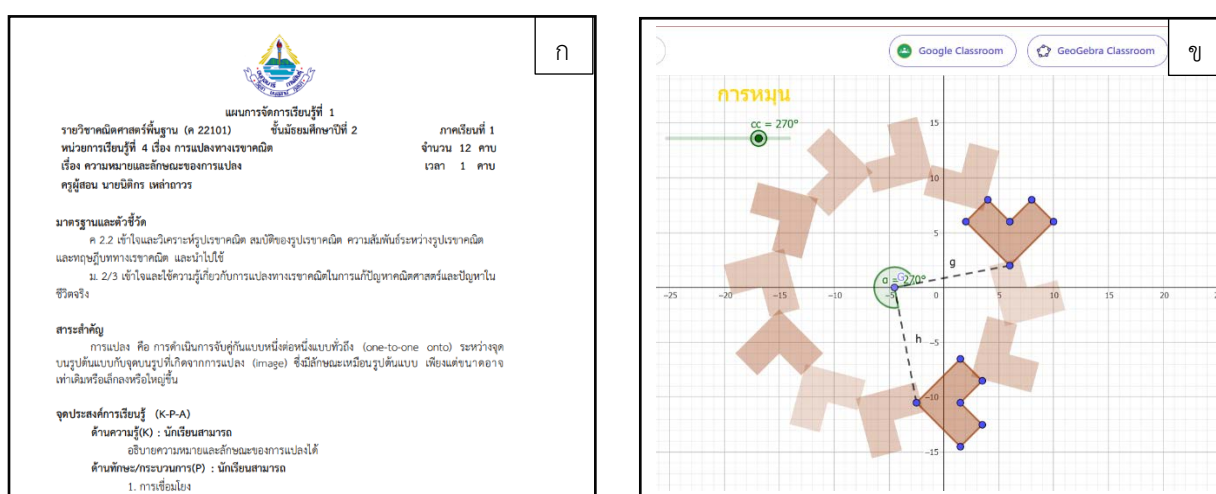
ห้อง 5 จำนวน 35 คน สุ่มอย่างง่ายมา 21 คน

ห้อง 6 จำนวน 34 คน สุ่มอย่างง่ายมา 20 คน

ห้อง 7 จำนวน 36 คน สุ่มอย่างง่ายมา 21 คน

3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

3.1 แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ ร่วมกับ GeoGebra จำนวน 12 แผน แผนละ 1 คาบ รวมทั้งสิ้น 12 คาบ โดยผู้วิจัยได้นำแผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 12 แผน นำเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน ได้แก่ ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ จำนวน 1 ท่าน ผู้เชี่ยวชาญด้านเทคโนโลยีการจัดการเรียนรู้ จำนวน 1 ท่าน และผู้เชี่ยวชาญด้านการวัดและประเมินผลจำนวน 1 ท่าน เพื่อประเมินความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ พบว่า แผนการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสมในภาพรวมอยู่ในระดับมาก ($\bar{X} = 4.23$, S.D. = 0.17) โดยมีค่าความสอดคล้อง (IOC) เท่ากับ 0.86 ซึ่งระหว่าง 0.80 – 1.00



ภาพที่ 1 ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ (ก) และ GeoGebra (ข)

3.2 แบบทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต จำนวน 1 ชุด ดังนี้

3.2.1 แบบทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิต เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและให้เหตุผลประกอบ จำนวน 30 ข้อ โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้ เลือกคำตอบไม่ถูกต้องและไม่กล่าวอ้างเหตุผลประกอบคำตอบที่ได้ คิดเป็น 0 คะแนน และเลือกคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งสามารถกล่าวอ้างเหตุผลประกอบคำตอบได้ คิดเป็น 1 คะแนน มีค่าความสอดคล้องเชิงเนื้อหา (IOC) ระหว่าง 0.67 – 1.00 จากนั้นนำแบบทดสอบไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างเพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ โดยคัดเลือกแบบทดสอบจำนวน 24 ข้อ ที่มีค่าความยากง่าย (p) อยู่ระหว่าง 0.29 – 0.72 และมีค่าอำนาจจำแนก (r) ระหว่าง 0.24 – 0.60 และมีค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับ เท่ากับ 0.91

3.2.2 แบบทดสอบวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือกและให้เหตุผลประกอบ จำนวน 30 ข้อ โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้ เลือกคำตอบไม่ถูกต้องและไม่กล่าวอ้างเหตุผลประกอบการคำตอบที่ได้ คิดเป็น 0 คะแนน และเลือกคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งสามารถกล่าวอ้างเหตุผลประกอบคำตอบได้ คิดเป็น 1 คะแนน มีค่าความสอดคล้องเชิงเนื้อหา (IOC) ระหว่าง 0.67 – 1.00 จากนั้นนำแบบทดสอบไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างเพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ โดยคัดเลือกแบบทดสอบจำนวน 16 ข้อ ที่มีค่าความยากง่าย (p) อยู่ระหว่าง 0.24 – 0.70 และมีค่าอำนาจจำแนก (r) ระหว่าง 0.35 – 0.77 และมีค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับ เท่ากับ 0.88

3.3 แบบวัดเจตคติ ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra จำนวน 4 ด้าน ด้านละ 5 ข้อ รวมทั้งสิ้น 20 ข้อ เป็นแบบประเมินค่า 5 ระดับ โดยมีค่าความสอดคล้องเชิงเนื้อหา (IOC) ระหว่าง 0.67 – 1.00

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บข้อมูลกับกลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนอนุกุลนารี จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 156 คน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2567 โดยมีขั้นตอน ดังนี้

- 4.1 ปฐมนิเทศนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชี้แจงจุดประสงค์ และการจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra
- 4.2 ดำเนินการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับกลุ่มตัวอย่าง สัปดาห์ละ 3 คาบ รวมทั้งสิ้น 4 สัปดาห์
- 4.3 ดำเนินการทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และวัดเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังสิ้นสุดการจัดการเรียนรู้
- 4.4 นำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ และนำเสนอผลการวิจัยในลำดับต่อไป

5. การวิเคราะห์ข้อมูล

5.1 วิเคราะห์เปรียบเทียบการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 ด้วยสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ร้อยละ และการทดสอบที (t-test for one sample) และการวิเคราะห์เนื้อหา

5.2 วิเคราะห์เปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 ด้วยสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ร้อยละ และการทดสอบที (t-test for one sample) และการวิเคราะห์เนื้อหา

5.3 วิเคราะห์ผลการศึกษาเจตคติของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ด้วยสถิติพื้นฐาน ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) จากนั้นแปลผลค่าเฉลี่ยของคะแนนเจตคติเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนด

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ผลการวิจัย

การคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ผู้วิจัยแบ่งการสรุปผลออกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

1. ผลการวิเคราะห์การคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra ดังนี้

ตอนที่ 1 การคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra

ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เปรียบเทียบการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 โดยใช้สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ร้อยละ และการทดสอบที (t-test for one sample) จากแบบทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิต ผลปรากฏดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 การคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra

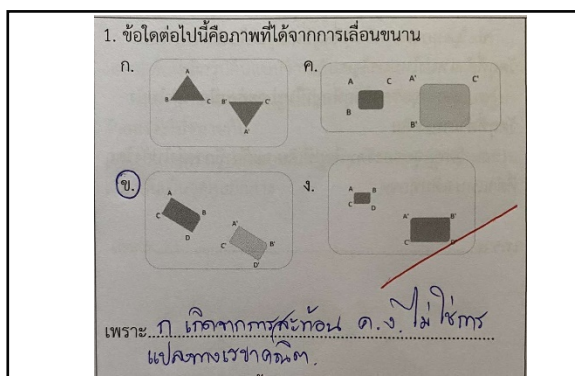
การคิดเชิงเรขาคณิตตามระดับ การคิดทางเรขาคณิต	n	หลังเรียน				t	sig
		คะแนนเต็ม	$\bar{X}$	S.D.	ร้อยละ		
ระดับที่ 1 การมองเห็นรูปธรรมภายนอก	156	6.00	5.15	0.85	85.79	9.53**	0.00
ระดับที่ 2 การวิเคราะห์		6.00	4.88	0.97	81.41	4.95**	0.00
ระดับที่ 3 นิรนัยแบบไม่เป็นทางการ		6.00	4.76	0.92	79.38	3.58**	0.00
ระดับที่ 4 นิรนัยแบบเป็นทางการ		6.00	4.72	0.82	78.74	3.44**	0.00
รวม		24.00	19.52	0.90	81.33	5.38**	0.00

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตารางที่ 2 พบว่า การคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra คิดเป็นร้อยละ 81.33 สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตทุกระดับสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ตอนที่ 2 ผลการสัมภาษณ์และตัวอย่างคำตอบการคิดเชิงเรขาคณิต

1. ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก



ภาพที่ 2 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 2 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการกล่าวข้อแตกต่างของการแปลงเรขาคณิตว่าแต่ละข้อคือการแปลงทางเรขาคณิตรูปแบบใด ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังสื่อความหมายของเหตุผลไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถระบุเหตุผลในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีบทสัมภาษณ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

T : จากโจทย์ในข้อนี้เราตอบข้อไหน

S : ตอบข้อ ข ครับครู

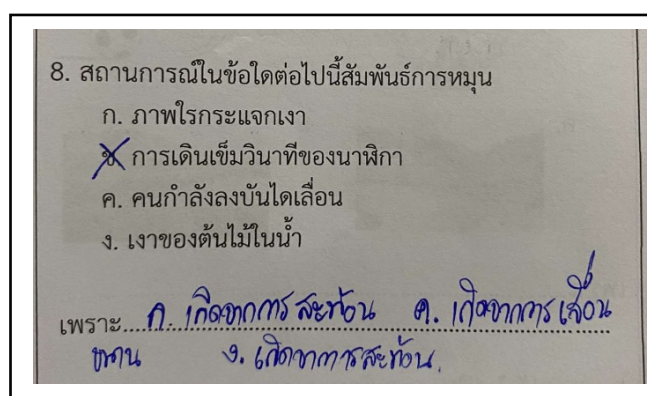
T : ไหนลองบอกเหตุผล ว่าทำไมถึงตอบข้อนี้ ลองแยกความแตกต่างให้ครูดูก็ได้

S : ค กับ ง ตัดทิ้งได้เลยครับ เพราะ การเลื่อนขนาน รูปต้นแบบกับรูปที่ได้ต้องมีขนาดเท่ากัน

T : แล้วข้อ ก ละ

S : ก เป็นการสะท้อนครับ

2. ระดับการวิเคราะห์



ภาพที่ 3 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 3 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการกล่าวอ้างถึงสมบัติที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังสื่อความหมายของเหตุผลไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถระบุเหตุผลในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีบทสัมภาษณ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

T : จากโจทย์ในข้อนี้เราตอบข้อไหน และมีการวิเคราะห์ว่าแตกต่างกันอย่างไร

S : หนูตอบข้อ ข ครับครู เพราะจากรูปที่เห็นเกิดจากการหมุนและเป็นสมบัติของการหมุนค่ะ

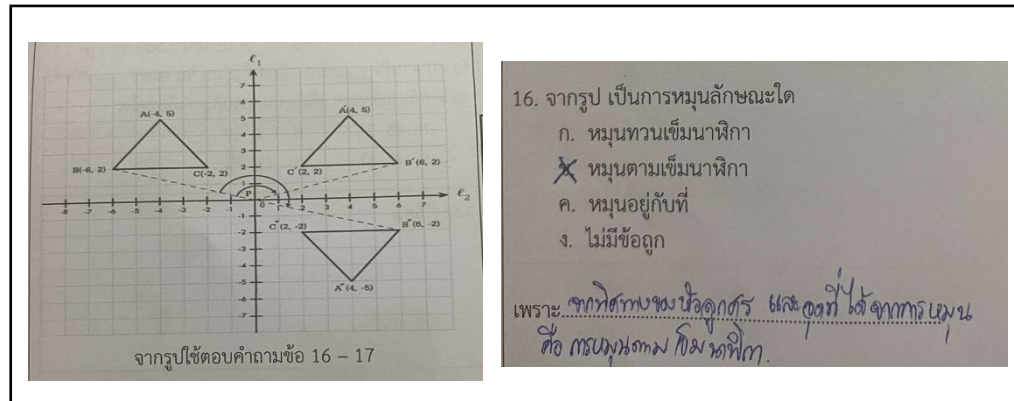
T : แล้วข้ออื่นไม่ใช่การหมุนหรือนักเรียน

S : ไม่ค่ะครู ก กับ ง เกิดจากการสะท้อน และ ค เกิดจากการเลื่อนขนานค่ะ

T : สุดยอดมากครับเป็นคำตอบที่ถูกแล้ว

S : ขอบคุณคะคุณครู

3. นิรนัยแบบไม่เป็นทางการ



ภาพที่ 4 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 4 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการนิรนัยแบบไม่เป็นทางการหรือสมบัติที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังสื่อความหมายของเหตุผลไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถระบุเหตุผลในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีบทสัมภาษณ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

T : จากโจทย์ในข้อนี้เราตอบข้อไหน

S : ข้อ ข ค่ะ

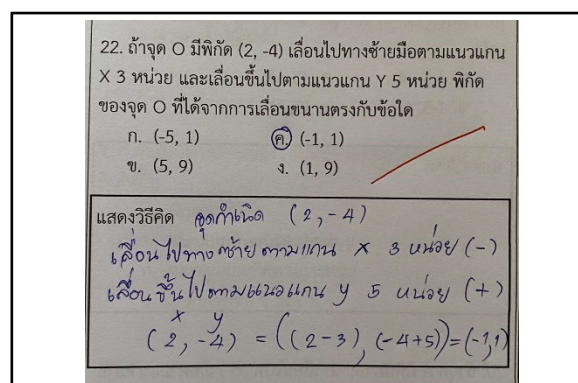
T : ทำไมเราถึงตอบข้อ ข มีกระบวนการคิดอย่างไร

S : หนูดูจากรูปที่ได้จากการหมุน และทิศทางของการหมุนที่เป็นลูกศรคะคุณครู

T : เก่งมากครับเป็นคำตอบที่ถูกแล้ว

S : ขอบคุณคะคุณครู

4. ระดับนิรนัยแบบเป็นทางการ



ภาพที่ 5 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 5 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการแสดงวิธีคิดได้ถูกต้อง ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังมีการแสดงวิธีคิดไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถเขียนแสดงวิธีการคิดในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีบทสัมภาษณ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

T : จากโจทย์ในข้อนี้เราสามารถบอกได้ไหมว่า โจทย์ให้อะไรมาบ้าง
S : ได้ครับครู หนึ่งเลยโจทย์ให้จุดกำเนิดมาครับ คือ (2, -4) สองเลื่อนไปทางซ้ายตามแกน X 3 หน่วย สามเลื่อนขึ้นตามแกน Y 5 หน่วยครับ
T : แล้วโจทย์ต้องการหาอะไร
S : พิกัดของจุด O ที่ได้จากการเลื่อนขนานครับ
T : ไหนลองอธิบายวิธีคิดให้ครูดูหน่อย
S : ได้ครับ โจทย์บอกจุดเริ่มเริ่มคือ (2, -4) เลื่อนไปทางซ้ายตามแกน X 3 หน่วย (ซ้ายลบออก ขวาวบวกครับ) เลื่อนขึ้นตามแกน Y 5 หน่วย (ลงลบออก ขึ้นบวกครับ) จากนั้น นำจุดเริ่ม X คือ 2 ลบออก 3 เหลือ -1 จุดเริ่ม Y คือ -4 บวก 5 เหลือ 1 ครับ ผมได้คำตอบคือ (-1, 1) ครับ
T : สดุดยอครับนักเรียนถูกต้องแล้ว
S : ขอบคุณครับครู

2. ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 1 ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 โดยใช้สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ร้อยละ และการทดสอบที (t-test for one sample) จากแบบทดสอบวัดการคิดเชิงเรขาคณิต ผลปรากฏดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

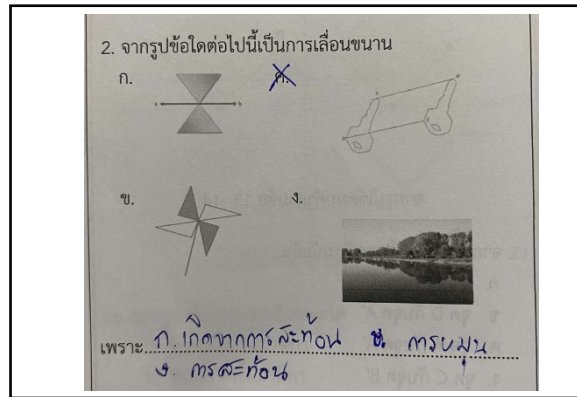
ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์	n	หลังเรียน				t	Sig
		คะแนนเต็ม	$\bar{x}$	S.D.	ร้อยละ		
ระดับการกระทำ	156	4.00	3.39	0.77	84.78	6.37**	0.00
ระดับกระบวนการ		4.00	3.33	0.84	83.33	4.93**	0.00
ระดับวัตถุ		4.00	3.20	0.79	80.29	3.36**	0.00
ระดับโครงสร้างทางปัญญา		4.00	3.31	0.79	82.85	4.94**	0.00
รวม		16.00	13.25	0.78	82.81	7.38**	0.00

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตารางที่ 3 พบว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra นักเรียนสามารถทำคะแนนได้ร้อยละ 82.81 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 การจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ และเมื่อพิจารณารายด้าน พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับการกระทำ (ร้อยละ 84.78) สูงสุด รองลงมา คือระดับกระบวนการ (ร้อยละ 83.33) ระดับโครงสร้างทางปัญญา (ร้อยละ 82.85) และระดับวัตถุ (ร้อยละ 80.29) ตามลำดับ

ตอนที่ 2 ผลการสัมภาษณ์และตัวอย่างคำตอบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

1. ระดับการกระทำ



ภาพที่ 6 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 6 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจที่ดี และจดจำลักษณะพื้นฐานของการแปลงได้ สามารถระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการกล่าวข้อแตกต่างของการแปลงเรขาคณิตว่าแต่ละข้อคือการแปลงทางเรขาคณิตรูปแบบใด ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังสื่อความหมายของเหตุผลไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถระบุเหตุผลในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีบทสัมภาษณ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

T : จากโจทย์ในข้อนี้เราตอบข้อไหน

S : ตอบข้อ ค ครับครู

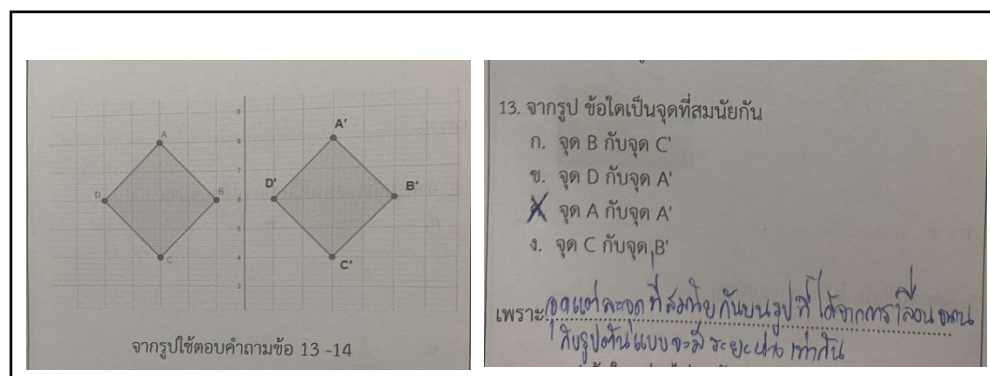
T : ไหนลองบอกเหตุผล ว่าเพราะอะไรถึงตอบข้อนี้ให้ครูฟังก็ได้

S : ก กับ ง ที่ผมตัดทิ้ง เพราะ ภาพที่ได้เกิดจากการสะท้อน

T : แล้วข้อ ข ละ

S : ข เป็นการหมุนครับ

2. ระดับกระบวนการ



ภาพที่ 7 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 7 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการกล่าวอ้างถึงสมบัติที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังสื่อความหมายของเหตุผลไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถระบุเหตุผลในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีบทสัมภาษณ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

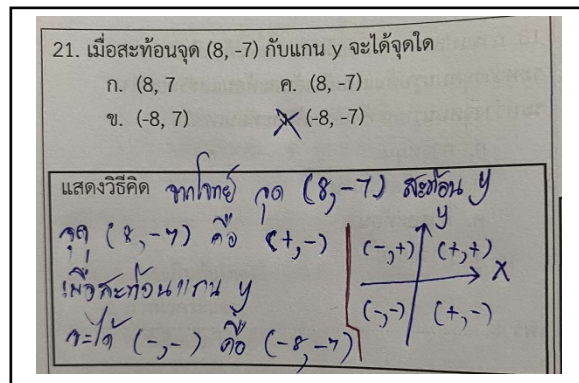
T : จากโจทย์ในข้อนี้เราตอบข้อไหน และมีพิจารณาอย่างไร

S : หนูตอบข้อ ค ครับครู เพราะจากรูปที่เห็นเกิดจากการเลื่อนขนาน โดยสมบัติข้อที่ 2 ข้อการเลื่อนขนาน คือ จุดแต่ละจุดที่สมนัยกันบนรูปที่ได้จากการเลื่อนกับรูปต้นแบบจะมีระยะห่างเท่ากัน

T : ถูกต้องแล้วครับเก่งมาก ที่สามารถจำสมบัติได้

S : ค่ะ ขอบคุณค่ะคุณครู

3. ระดับวัตถุ

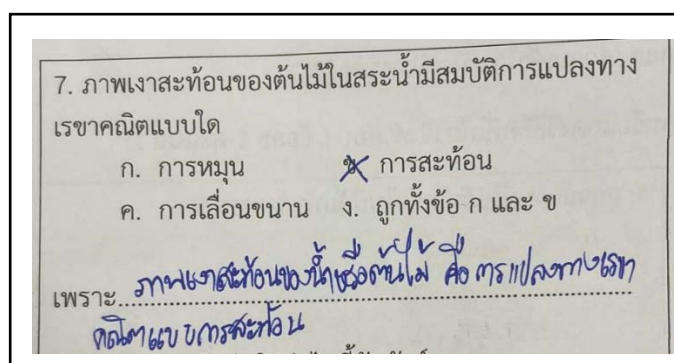


ภาพที่ 8 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 8 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ มีการแสดงวิธีคิดได้ถูกต้อง มีขั้นตอนชัดเจน สามารถแสดงวิธีคิดอย่างเป็นระบบ ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังมีการแสดงวิธีคิดไม่ชัดเจน แต่ยังสามารถเขียนแสดงวิธีการคิดในการให้คำตอบได้ นอกจากนี้ ยังมีทศสัมพันธ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

- T : จากโจทย์ในข้อนี้เราสามารถบอกได้ไหมว่า โจทย์ให้อะไรมาบ้าง
 S : ได้ครับค่ะ สิ่งที่โจทย์ให้จุดกำเนิดมาครับ คือ (8, -7)
 T : แล้วโจทย์ต้องการหาอะไร
 S : จุดใหม่ที่ได้จากการสะท้อนแกน y ค่ะ
 T : โหนลองอธิบายวิธีคิดให้ครูดูหน่อย
 S : ได้ค่ะ โจทย์บอกจุดเริ่มคือ (8, -7) สะท้อนแกน y โดยที่หวนดูจาก จุดภาคเอกและระยะห่างจากแกน y โดย จุด (8, -7) อยู่จุดภาคที่ 4 เมื่อสะท้อนแกน y อยู่จุดภาคที่ 3 คือ (-, -) จะได้จุดใหม่คือ (-8, -7)
 T : สุดท้ายครับนักเรียนถูกต้องแล้ว
 S : ขอบคุณค่ะครู

4. ระดับโครงสร้างทางปัญญา



ภาพที่ 9 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียน

จากภาพที่ 9 เมื่อผู้วิจัยได้วิเคราะห์คำตอบของผู้เรียน พบว่า นักเรียนระบุข้อความที่สมเหตุสมผลเพื่อใช้ประกอบที่มาของคำตอบ ถึงแม้ว่าบางส่วนจะยังสื่อความหมายของเหตุผลไม่ชัดเจนในแง่รายละเอียด แต่ยังสามารถระบุเหตุผลในการให้คำตอบได้ และสามารถเชื่อมโยงกับตัวอย่างจริงได้ในระดับพื้นฐาน นอกจากนี้ ยังมีทศสัมพันธ์เพื่อความชัดเจนในการให้เหตุผล ดังนี้

- T : จากโจทย์ในข้อนี้เราตอบข้อไหน
 S : ข้อ ข ค่ะ

T : ทำไมเราถึงตอบข้อ ข มีกระบวนการคิดอย่างไร

S : หนูใช้สมบัติการสะท้อน ที่ว่า รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อน จะทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูปต้นแบบ หรือพลิกรูปที่เกิดจากการสะท้อนอย่างใดอย่างหนึ่ง จะได้ ต้นแบบและภาพที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ ค่ะ เงาของ ต้นไม้ที่เกิดจากในสระน้ำก็เช่นกันค่ะ

T : เก่งมากครับเป็นคำตอบที่ถูกแล้ว

S : ขอบคุณค่ะคุณครู

3. ผลการศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ผลการศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ด้วยสถิติพื้นฐาน ค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) จากนั้นแปลผลค่าเฉลี่ยของคะแนนเจตคติเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนด ผลปรากฏดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ผลการศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้ GeoGebra

เจตคติทางบวก/ทางลบ	$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
ด้านการจัดการเรียนรู้	4.69	0.57	มากที่สุด
ด้านครูผู้สอน	4.70	0.50	มากที่สุด
ด้านสื่อการเรียนการสอน โปรแกรม GeoGebra	4.81	0.42	มากที่สุด
ด้านกระบวนการเรียนรู้	4.66	0.54	มากที่สุด
รวม	4.72	0.51	มากที่สุด

จากตารางที่ 4 พบว่า นักเรียนมีเจตคติหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ในภาพรวมอยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{x} = 4.72$, S.D. = 0.51) เมื่อพิจารณารายด้าน พบว่า นักเรียนมีเจตคติต่อด้านสื่อการเรียนการสอน โปรแกรม GeoGebra สูงสุดอยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{x} = 4.81$, S.D. = 0.42) รองลงมา ด้านครูผู้สอน อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{x} = 4.70$, S.D. = 0.50) ด้านการจัดการเรียนรู้ อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{x} = 4.69$, S.D. = 0.57) ด้านกระบวนการเรียนรู้ อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{x} = 4.66$, S.D. = 0.54) ตามลำดับ

อภิปรายผล

การศึกษามผลการการคิดเชิงเรขาคณิตและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

1. ผลการเปรียบเทียบการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 พบว่า นักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่าร้อยละ 75 เมื่อพิจารณาจากการทำแบบทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ของนักเรียน ของนักเรียนจะเห็นได้ว่าโปรแกรม GeoGebra ที่สามารถสร้างรูปทางเรขาคณิต และที่มาของการแปลงทางเรขาคณิตในรูปแบบ ต่าง ๆ จะเห็นว่านักเรียนสามารถมองเห็นรูปธรรมได้ดียิ่งขึ้นตามลำดับ ทฤษฎีของ Van Hiele (1986) สามารถแสดงเหตุผล ประกอบคำตอบ โดยอ้างทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องได้ถูกต้อง แต่ยังสื่อความหมายไม่ชัดเจน ซึ่งจะเห็นได้จากการที่นักเรียนสามารถ ระบุคำตอบ และเหตุผลที่สมเหตุสมผลได้ และในขั้นการนิรนัยอย่างไม่เป็นทางการ จะเห็นว่านักเรียนสามารถวางแผนแก้ไข ปัญหาและให้เหตุผลในสิ่งที่ได้ แต่ยังมีส่วนที่ยังสื่อความหมายไม่ชัดเจน ซึ่งอาจนำไปสู่ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถเขียนแสดงวิธีคิดแบบมีแบบแผน โดยสามารถให้เหตุผลโดยเขียนขั้นตอนการแสดงวิธีคิดที่ได้มาซึ่ง คำตอบ และสื่อความหมายอย่างชัดเจน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ผู้วิจัย พัฒนาขึ้น ได้ผ่านการประเมินความเหมาะสมโดยผู้เชี่ยวชาญ ตลอดจนมีการปรับปรุงให้มีความเหมาะสม และสอดคล้องกับ จุดประสงค์ที่ตั้งไว้ อีกทั้งการจัดการเรียนรู้มีการใช้ GeoGebra ซึ่งถือเป็นเครื่องมือที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการจัดการ เรียนรู้ ทำให้นักเรียนมองเห็นภาพ สามารถกระตุ้นความสนใจของผู้เรียน ส่งผลให้นักเรียนสามารถสรุปองค์ความรู้ได้อย่าง รวดเร็ว และมีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตที่สูงขึ้น สอดคล้องกับ Vojkuvkova (2012) กล่าวว่า การพัฒนาความคิดเชิงเรขาคณิต อย่างเป็นลำดับขั้น โดยเริ่มจากการสร้างแบบจำลองภาพ เพื่อนำไปสู่การวิเคราะห์เชิงนามธรรม ด้วยการค้นพบด้วยตนเอง ช่วย ให้นักเรียนบรรลุความเข้าใจ และมีการคิดเชิงเรขาคณิตที่ดีขึ้น สอดคล้องกับ ที่รายงานว่า ผลการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิต

โปรแกรม GeoGebra สามารถส่งเสริมระดับความคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele (1986) เนื่องจาก โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมเชิงพลวัต ที่ผู้เรียนสามารถสืบค้นและศึกษาเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ส่งผลให้นักเรียนเกิดความสนใจ และเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตมากขึ้น สอดคล้องกับ Khansila *et al.* (2022) พบว่า กิจกรรมการเรียนรู้ GeoGebra นักเรียนสามารถออกแบบ และวางแผนแนวทางการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต นักเรียนรู้สึกสนุกกับการใช้ GeoGebra ส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เพิ่มสูงขึ้น สอดคล้องกับ Kanachan *et al.* (2020) พบว่า การใช้สื่อคอมพิวเตอร์ โปรแกรม GeoGebra ทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้น ตื่นเต้น และสนุกสนานกับการแก้ปัญหา อีกทั้งผู้เรียนสามารถเขียนภาพปรับเปลี่ยนค่า และรูปร่างได้ตามจินตนาการ รวมถึงการวางแผน และการแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรม GeoGebra

2. ผลการเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่าร้อยละ 75 ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 เมื่อพิจารณาจากการทำแบบทดสอบหลังการจัดการเรียนรู้ของนักเรียน พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับการกระทำ สูงสุด ร้อยละ 84.78 เนื่องจาก GeoGebra ช่วยให้การแปลงทางเรขาคณิต เช่น การหมุน การสะท้อน การเลื่อน และการขยาย สามารถมองเห็นผลลัพธ์ได้ทันที ผ่านกราฟิกที่แสดงภาพสามมิติหรือสองมิติ ซึ่งช่วยให้การทำความเข้าใจทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เช่น การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดหรือรูปทรงเข้าใจได้ง่ายมากขึ้น จึงช่วยลดปัญหาความเข้าใจที่ผิดพลาดจากการจินตนาการในสมองได้ รองลงมา คือระดับกระบวนการ ร้อยละ 83.33 นักเรียนสามารถทำความเข้าใจขั้นตอนต่าง ๆ ได้ทันที และสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น ทำให้ติดตาม และปรับแก้ขั้นตอนการแปลงได้โดยตรง ซึ่งช่วยให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการในแต่ละขั้นตอนได้ลึกซึ้งมากขึ้น ระดับโครงสร้างทางปัญญา ร้อยละ 82.85 การเรียนรู้การแปลงทางเรขาคณิตกลายเป็นกระบวนการที่เชื่อมโยงกับหลักการคณิตศาสตร์อื่น ๆ อย่างชัดเจน นักเรียนไม่เพียงแต่เรียนรู้การแปลงทางเรขาคณิต แต่ยังสามารถเชื่อมโยงกระบวนการแปลงแต่ละประเภทกับแนวคิดอื่น ๆ เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด จุดมุม และการเปลี่ยนแปลงทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในกระบวนการแปลงนั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ในการหมุน (rotation) นักเรียนจะเห็นว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างมุม และระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง ซึ่งช่วยสร้างความเข้าใจในระดับโครงสร้างที่เชื่อมโยงกันของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และระดับวัตถุ ร้อยละ 80.29 การใช้โปรแกรม GeoGebra ส่งผลให้การเรียนรู้เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตในระดับวัตถุมีความชัดเจน และมีประสิทธิภาพมากขึ้น นักเรียนสามารถเห็นการเปลี่ยนแปลงของวัตถุ และเข้าใจลักษณะ และคุณสมบัติของวัตถุที่ได้รับการแปลง ทำให้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในระดับวัตถุเป็นไปอย่างราบรื่น และมีความลึกซึ้ง ทั้งนี้ยังช่วยเสริมสร้างความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนให้กลายเป็นสิ่งที่สามารถเข้าใจ และประยุกต์ใช้ได้ดียิ่งขึ้นตามลำดับ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น ผ่านการประเมินความเหมาะสมโดยผู้เชี่ยวชาญ ตลอดจนมีการปรับปรุงให้มีความเหมาะสม และสอดคล้องกับจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ อีกทั้งความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการเข้าใจแนวคิด ทฤษฎี หลักการ และความสัมพันธ์ขององค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนการนำความรู้ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ อย่างเหมาะสม โดยไม่ใช่เพียงการจดจำหรือปฏิบัติตามขั้นตอนเท่านั้น แต่รวมถึงการวิเคราะห์เชิงเหตุผล การเชื่อมโยงแนวคิด และการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ด้วย (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) สอดคล้องกับ Skemp (1976) กล่าวว่า การสอนที่ดีควรมุ่งเน้นให้ผู้เรียนมีความเข้าใจเชิงสัมพันธ์มากกว่าการจดจำเพียงแค่กระบวนการ เพราะการเรียนรู้เชิงสัมพันธ์ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและการสร้างความเข้าใจที่ยั่งยืน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Jan-ngam and Suanpradit (2021) ที่ได้พัฒนาสื่ออิเล็กทรอนิกส์ (E-book) โดยใช้โปรแกรม GeoGebra พบว่า สามารถกระตุ้นผู้เรียนให้มีความสนใจและการเรียนรู้ได้ เนื่องจาก โปรแกรม GeoGebra เป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้สำหรับสร้างสำรวจ และวิเคราะห์สิ่งต่าง ๆ เป็นสื่อที่ช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นภาพ ทำให้ผู้เรียนเกิดกระบวนการคิด หาความสัมพันธ์ของข้อมูลจนสามารถอธิบาย และสรุปความคิดรวบยอดได้ด้วยตนเอง

3. ผลการศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra พบว่า นักเรียนมีเจตคติที่ดีหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ในภาพรวมอยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{X} = 4.72$, S.D. = 0.51) จากการพิจารณารายด้านนักเรียนมีเจตคติต่อด้านสื่อการเรียนการสอน โปรแกรม GeoGebra สูงสุด อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{X} = 4.81$, S.D. = 0.42) เนื่องจากนักเรียนมีความสนใจพร้อมทั้งสามารถเข้าใจเนื้อหาจากสื่อการเรียนการสอน โปรแกรม GeoGebra รองลงมา ด้านครูผู้สอน อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{X} = 4.70$, S.D. = 0.50) เนื่องจากครูสามารถเป็นสื่อกลางในการอธิบายสื่อการเรียนการสอน โปรแกรม GeoGebra ให้เข้ากับเนื้อหา พร้อมทั้งเป็นมิตรกับนักเรียนทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อครู ด้านการจัดการเรียนรู้ อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{X} = 4.69$, S.D. = 0.57) เนื่องจากนักเรียนมีความเข้าใจพร้อมทั้งสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้ในเนื้อหา เรื่อง การแปลงทางเรขาคณิต ทำให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ในเรื่องต่อไปได้ ด้านกระบวนการเรียนรู้ อยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{X} = 4.66$, S.D. = 0.54) เนื่องจากครูจัดกระบวนการเรียนรู้ในรูปแบบที่น่าสนใจ

พร้อมทั้งสามารถทำให้นักเรียนสนใจและสนุกกับกิจกรรมที่ครูนำมาจัดการเรียนการสอน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ที่เน้นให้ผู้เรียนได้เห็นถึงรูปธรรม ส่งผลให้ผู้เรียนมีเจตคติอยู่ในระดับมากที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับ (The institute for the promotion of teaching science and technology, 2012) ได้กล่าวไว้ว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์เป็นความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ส่งผลให้ผู้เรียนแสดงพฤติกรรมที่จะตอบสนองต่อวิชาคณิตศาสตร์ในลักษณะของความชอบหรือไม่ชอบ พอใจหรือไม่พอใจ เห็นคุณค่าหรือไม่เห็นคุณค่า รวมทั้งความพร้อมหรือไม่พร้อมที่จะเรียนวิชาคณิตศาสตร์ สอดคล้องกับ Worasarn, Nongharnpituk and Khansila (2019) รายงานว่า ผู้เรียนมีความพึงพอใจต่อการเรียนรู้ด้วยโปรแกรม GeoGebra ในภาพรวมอยู่ในระดับมาก เนื่องจากการเรียนการสอนที่ใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นสื่อการเรียนรู้ที่มีความน่าสนใจ แปลกใหม่ และไม่ซับซ้อนในการใช้งาน ทั้งนี้ ผู้เรียนสามารถลงมือปฏิบัติได้จริง สร้างความสนุกสนานระหว่างการเรียนรู้

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะจากการวิจัย

สรุปผลการวิจัย

1. ผลการเปรียบเทียบการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 พบว่า นักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่าร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
2. ผลการเปรียบเทียบความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra กับเกณฑ์ร้อยละ 75 พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่าร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
3. ผลการศึกษาเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีเจตคติหลังได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ในภาพรวมอยู่ในระดับมากที่สุด ($\bar{X} = 4.72$, S.D. = 0.51)

ข้อเสนอแนะในการนำผลวิจัยไปใช้

การใช้การจัดการเรียนรู้ผ่านบทเรียน GeoGebra ครูเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญในการกระตุ้นและเสริมสร้างแรงจูงใจให้กับผู้เรียน ดังนั้นครูควรจัดเตรียมกระบวนการเรียนรู้ เตรียมตั้งคำถามเพื่อกระตุ้นและเสริมแรงจูงใจไว้ล่วงหน้า มีการช่วยเหลือนักเรียนในเวลาที่เหมาะสม เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้เวลาในการสืบเสาะ เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนสามารถคิดวิเคราะห์และหาแนวทางในการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านบทเรียน GeoGebra ที่มีการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านอื่น ๆ ที่เหมาะสมกับบริบทของครู นักเรียน และโรงเรียน เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาทักษะและทางคณิตศาสตร์ในด้านต่าง ๆ
2. ควรมีการศึกษาถึงตัวแปรอื่น ๆ ที่อาจส่งผลต่อการเรียนของผู้เรียนหลังการใช้การจัดการเรียนรู้ผ่านบทเรียน GeoGebra เช่น ความพึงพอใจ ความสนใจและความคงทนในการเรียนรู้

กิตติกรรมประกาศ

บทความวิจัยฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ ต้องขอขอบพระคุณอย่างสูงในความเมตตาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุวรรณวัฒน์ เทียนยุทธกุล อาจารย์สมใจ ภูครองทุ่ง และ ดร.วิจิตรา โสเพ็ง ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์เป็นผู้เชี่ยวชาญในการเสนอแนะในการทำวิจัยและการพัฒนานวัตกรรมเพื่อใช้ในการทำวิจัย ตลอดจนผู้บริหาร คณะครู นักเรียนที่ได้ให้ความร่วมมือในการทำวิจัยในครั้งนี้

References

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Information Age Publishing.
- Charnprasert, S. (2014). Active learning: Learning management in the 21st century. *IPST magazine*, 42(188), 3-6.
- Charnprasert, P. (2014). Mathematics instruction in the digital age. *Journal of Education*, 22(2), 45-58.

- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** (pp. 95–123). Kluwer Academic Publishers.
- Hancherngchai, S., Inprasitha, M. and Thinwiangthong, S. (2017). Mathematics Teacher Education Program for 21st Century. **HRD JOURNAL**, 8(1), 55-66.
- Hohenwarter, M. and Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. **Proceedings of the Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference** (pp. 1-6). 2004. Pécs, Hungary.
- Jan-ngam, P. and Suanpradit, A. (2021). Development of electronic media (E-book) using GeoGebra software. **Journal of Research and Development for Education**, 6(2), 105-115.
- Kanachan, J., Kaewkhamson, K., Nongharnpituk, P. and Khansila, P. (2020). A study of learning achievement in the applications of derivative topic for Grade-12 students taught by incorporating GeoGebra program into mathematics problem-solving based on Polya's method (in Thai). **Journal of Science and Science Education**, 3(1), 73-83.
- Khansila, P., Yonwilad, W., Nongharnpituk, P. and Thienyutthakul, S. (2022). Improving Academic Performance in Geometry Using a Mastery Learning Approach through GeoGebra. **Journal of Educational Issues**, 8(2), 876-894.
- Ministry of Education. (2017). **Indicators and Core Content Mathematics Department (Revised Version B.E. 2560, A.D.2017) The Basic Education Care Curriculum B.E. 2551 (A.D. 2008)**. (in Thai). The Agricultural Cooperative Federation of Thailand Limited.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and standards for school mathematics. Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM.
- National Institute of Educational Testing. (2023). Results of the Basic Education National Test for Grade 9 Mathematics, Academic Year 2023. Retrieved 10 September 2024, from **Go ToKnow**: <https://newonetrresult.niets.or.th/AnnouncementWeb/Notice/FrBasicStat.aspx>
- Phooddee, W. (2020). Mathematics instruction in digital age: Methods and tools (in Thai). **Journal of Science and Science Education**, 3(2), 190-199.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, 77, 20–26.
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012). **Guidelines for Mathematics Learning Management at the Primary School Level** (p. 189). Bangkok: Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology.
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2017). A guide to using the curriculum to learn mathematics (revised version B.E. 2560) according to the core curriculum for basic education, 2 0 0 8 . Retrieved 1 7 September 2 0 2 4 , from **Go ToKnow**: <https://www.scimath.org/ebook-mathematics/item/8380-2560-2551-8380>
- Thongma, T. (2018). Mathematics learning resources for mobile learning in digital age (in Thai). **Journal of Educations studies, Chulalongkorn University**, 46(1), 251-256.
- Van Hiele, P. M. (1986). **Structure and insight: A theory of mathematics education**. Academic Press.
- Vojkuvkova, I. (2012). The van Hiele model of geometric thinking. **Proceedings of the 21st Annual Conference of Doctoral Students – WDS 2012** (pp. 72–75). Czech Republic: Charles University.
- Worasarn, J., Nongharnpituk, P. and Khansila, P. (2019). Development of learning activities emphasizing mathematical processes using GeoGebra program on system of linear equations with two variables topic for grade-9 students (in Thai). **Journal of Science and Science Education**, 2(1), 34-42.