การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 4

A Study of Mathematical Misconceptions on Vectors in Three Dimensions of The Fourth Year Students Majoring in Teaching Mathematics

ณรงค์ฤทธิ์ ฉายา

Naronglit Chaya

โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา กรุงเทพมหานคร

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 กลุ่มเป้าหมายที่ศึกษาในการวิจัยเป็นนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 4 คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปีการศึกษา 2560 จำนวน 19 คนเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย จำนวน 23ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.8571 และแบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ข้อมูล โดยหาความถี่ ร้อยละ และการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มเป้าหมายที่ศึกษา มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ มากที่สุด คือ ประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัด กล่าวคือ นิสิตมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง ร้อยละ 29.62 รองลงมาคือ ประเภทการตีความผิด กล่าวคือ นิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริงร้อยละ 29.23 ประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ นิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์ ร้อยละ 25.58 และ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข กล่าวคือ นิสิตนำทฤษฎีบท กฎสูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา ร้อยละ 15.57 ตามลำดับ

คำสำคัญ: มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เวกเตอร์ในสามมิติ การสอนคณิตศาสตร์

Abstract

The purpose of this research was to study the mathematical misconceptions of three-dimensional vectors among the fourth year students majoring in teaching mathematics. The sampling population of this research included nineteen fourth-year students majoring in teaching mathematics at the Faculty of Education, Kasetsart University, 2017 academic year. The research instruments applied were the 23-item subjective test on mathematical misconceptions, developed by the researcher, with the reliability value of 0.8571 and an in-depth interview concerning mathematical conceptions. The data were analyzed by using frequency, percentage, and content analysis. By the research, it was found out that the sampling population had mathematical misconceptions of three-dimensional vectors. First of all, 29.62 percent of them had limited knowledge about three-dimensional vectors, not enough for accurate application. Secondly, 29.23 percent of them misinterpreted or inaccurately conveyed the data. Thirdly, 25.58 percent of them had limited understanding concerning mathematical conceptions. Therefore, they applied mathematical rules of algebra and basic geometry inappropriately. Finally, 15.57 percent of them used irrelevant references for scopes and conditions. In other words, they misused theorems, laws, formulas and definitions in solving problems.

Keywords: Mathematical Misconceptions, Three-Dimensional Vector, Mathematics Teaching

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาในโลกปัจจุบันมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว การพัฒนาประชากรของประเทศให้มีความรู้ความสามารถให้สอดคล้องกับการก้าวสู่ศตวรรษที่ 21 คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญในการพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์ สอดคล้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST), 2012) ได้ระบุว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการคิดของมนุษย์ การคิดทางคณิตศาสตร์ทำให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้อย่างรอบคอบ ช่วยในการวางแผน ตัดสินใจและนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ นอกจากที่กล่าวมาข้างต้น คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพัฒนาทางด้านต่างๆและเป็นตัวชี้วัดถึงความสามารถของคน กล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาพื้นฐาน ซึ่งมีความสำคัญและจำเป็นอย่างมาก แต่ในปัจจุบันผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตั้งแต่ปีการศึกษา 2556-2559 มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 20.45, 21.75, 26.59, 24.88 คะแนน ตามลำดับ และต่ำกว่าร้อยละ 50 (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology, 2016) สอดคล้องกับการรายงานผลจากโครงการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (PISA 2015) ที่ประเมินสมรรถนะการเรียนรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematics Literacy) พบว่าคะแนนเฉลี่ยคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยคือ 415 คะแนน อยู่ในช่วงลำดับที่ 49 - 55 ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ย OECD มากกว่าหนึ่งระดับ และมีคะแนนคณิตศาสตร์อยู่ในกลุ่มเดียวกับประเทศชิลี ตุรกี มอลโดวา อุรุกวัย มอนเตเนโกร ตรินิแดดและโตเบโก และแอลเบเนีย ประเทศในเอเชียที่ร่วมการประเมินและมีคะแนนเฉลี่ยต่ำกว่าไทย คือ อินโดนีเซีย ทั้งนี้ นักเรียนไทยกลุ่มสูง (กลุ่มที่มีคะแนนอยู่ที่ 10% บน) มีคะแนนคณิตศาสตร์ 521 คะแนน กับนักเรียนไทยกลุ่มต่ำ (กลุ่มที่มีคะแนนอยู่ที่ 10% ล่าง) มีคะแนนคณิตศาสตร์ 313 จาก คะแนนเต็ม 600 คะแนน แนวโน้มคะแนนคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทย เมื่อเทียบกับการประเมินคณิตศาสตร์ที่เป็นวิชาหลักใน PISA 2012 ลดลง 11 คะแนน และใน PISA 2003 ลดลง 2 คะแนน และคะแนน PISA 2015 ใกล้เคียงกับการประเมินใน PISA 2006 และ PISA 2009 (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology, 2016) จากผลการประเมินทั้ง O-NET และ PISA สะท้อนให้เห็นถึงศักยภาพที่จำเป็นของนักเรียนที่ ต้องได้รับการพัฒนาอย่างจริงจัง ซึ่งสาเหตุที่คุณภาพของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนไทย ยังไม่ประสบความสำเร็จอาจมาจากหลายสาเหตุ เช่น นักเรียนเข้าใจเนื้อหาวิชาไม่ดีพอ หรือมีข้อผิดพลาดระหว่างทำข้อสอบ หรือมาจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน กระบวนการจัดการเรียนรู้ ที่ไม่สอดคล้องกับผู้เรียนที่มีความแตกต่างกันหรืออาจเป็นเพราะครูมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนส่งผลให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน การจัดการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ได้มีการกำหนดทักษะเพื่อการเป็นครูมืออาชีพตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติได้แก่ ทักษะ 7C ของครูมืออาชีพโดยที่ทักษะ C1 มีจุดเน้นการออกแบบและเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยใช้นวัตกรรมการเรียนรู้ (Dechakupt, 2015: 9-11) ในการออกแบบและเขียนแผนการจัดการเรียนรู้นั้นผู้สอนต้องมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องในเนื้อหาสาระการเรียนรู้นั้นๆ เพื่อให้การจัดการเรียนรู้มีประสิทธิภาพเป็นไปตามจุดประสงค์ของการเรียนรู้ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญเป็นอย่างมากต่อความรู้ความเข้าใจ และการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหา มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจอย่างถ่องแท้เกี่ยวกับความรู้เฉพาะ หรือแนวคิดเชิงลึกทางคณิตศาสตร์ การเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรเน้นที่การทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ เพื่อที่จะทำให้ผู้สอนได้ข้อมูลว่าผู้เรียนเข้าใจหรือไม่เข้าใจเนื้อหาใดซึ่งจะนำไปสู่กระบวนการเรียนการสอนที่ส่งเสริมความเข้าใจและการพัฒนามโนทัศน์ (Makanong, 2014: 16-21)

ดังนั้นในการพัฒนาผู้เรียน ผู้สอนคณิตศาสตร์ที่ดีนั้นนอกจากจะต้องมีมโนทัศน์ในเนื้อหาระดับที่ตนจะสอนแล้ว ยังต้องมีมโนทัศน์ในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่ตนจะสอน ตลอดจนมีมโนทัศน์ในระดับที่สูงกว่าและในระดับที่ต่ำกว่า การมีมโนทัศน์ในระดับที่ต่ำกว่าจะช่วยให้ผู้สอนสามารถวิเคราะห์พื้นฐานความรู้ที่ผู้เรียนเรียนมา เพื่อจะได้ทบทวนหรือเพิ่มเติมให้ผู้เรียนก่อนที่จะสอนมโนทัศน์ใหม่ และการมีมโนทัศน์ในระดับที่สูงกว่าจะช่วยให้ผู้สอนสามารถสอนให้ผู้เรียนมีความรู้เพียงพอที่จะเป็นพื้นฐานของการเรียนในระดับที่สูงขึ้น แนวทางหนึ่งของการพัฒนาให้นักเรียนมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง คือ การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของครู เนื่องจากครูที่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์ดีจะสามารถสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ของเนื้อหา มองเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาในหัวข้อต่างๆ และวิเคราะห์ลำดับของเนื้อหาที่สอนได้อย่างมีประสิทธิภาพ (Angganpattarakajorn, 2014) สอดคล้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี IPST, 2012: 87-88) ได้ระบุว่าครูที่มีมโนทัศน์ทาง

คณิตศาสตร์ดีและเข้าใจลึกซึ้งเกี่ยวกับความหมาย ที่มาและความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันของมโนทัศน์ บทนิยาม ทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ จะสามารถจัดการเรียนรู้เพื่อสื่อสาร สื่อความหมายให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและลึกซึ้ง รวมทั้งสามารถวิเคราะห์เนื้อหาและสร้างคำถาม ขยายความเพื่อพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ให้แก่นักเรียนได้ เวกเตอร์ในสามมิติเป็นสาระที่ได้กำหนดไว้ในหลักสูตรสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมในวิชาคณิตศาสตร์ในช่วงชั้นที่ 4 ผู้วิจัยได้จัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติตั้งแต่ปีการศึกษา 2557- 2560 รวมระยะเวลา 4 ปีได้พบว่านักเรียนส่วนมากมีปัญหาในเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เช่น การจำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติผิด ขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบทสูตร กฎ บทนิยามและสมบัติที่เหมาะสมมาใช้ และประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยามและสมบัติไม่ถูกต้อง และขาดความเข้าใจในเรขาคณิตหรือพีชคณิตพื้นฐานที่มาใช้กับเวกเตอร์ในสามมิติ จากการสอนวิชา 01162324 การสังเกตและมีส่วนร่วมในการปฏิบัติการสอน II (Field Experiences: Observation and Participation in Teaching Practice II)ได้ ให้นิสิตได้ปฏิบัติการสอนจริงระหว่างการเตรียมแผนจัดการเรียนรู้นั้น ผู้วิจัยพบว่านิสิตมีมโนทัศน์ในเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติไม่ชัดเจน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Aina & Tetyana (2013) พบว่านักศึกษาปีที่ 1 ของ Ohio State University มีความคลาดเคลื่อนของเวกเตอร์สองประเภทได้แก่ ประเภทที่ 1 การดำเนินการของเวกเตอร์และภาพฉายของเวกเตอร์ ประเภทที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ จากประสบการณ์การจัดการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติและงานวิจัย แสดงให้เห็นว่า นักเรียนและนิสิตมีข้อบกพร่องและความคลาดเคลื่อนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นพื้นฐานในการเรียนวิทยาศาสตร์ขั้นสูง และ ลักษณะของเนื้อหาต้องมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องชัดเจน จึงจะสามารถจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง เวกเตอร์ในสามมิติมีความซับซ้อนต้องอาศัยความรู้เดิมที่ได้เรียนมาเป็นพื้นฐาน มีโอกาสที่ผู้สอนจะมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้ ประกอบกับผลการศึกษาของ Kasetmsukpipat (2016) ได้ศึกษาความคิดเห็นของนักศึกษาครูที่จะออกไปฝึกประสบการณ์วิชาชีพครู พบว่า นักศึกษาครูเห็นด้วยว่านักศึกษาครูต้องมีความพร้อมด้านความรู้ในเนื้อหาผนวกวิธีการสอนทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูก่อนออกไปฝึกประสบการณ์วิชาชีพครู ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัย จึงมีความสนใจทำการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 ที่ก่อนไปฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในปีการศึกษา 2561 เพื่อให้ทราบว่านิสิตมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ประเภทใดและมีลักษณะอย่างไร และ ผลของการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทางที่จะศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในสาระอื่นและเป็นแหล่งข้อมูลในการศึกษาค้นคว้าต่อไป

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มเป้าหมายที่ศึกษา

นิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ บางเขน จำนวน 19 คน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ตอนปลาย เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (IPST, 2008)

ระยะเวลาในการทำวิจัย

งานวิจัยนี้ทำในปีการศึกษา 2560 มีระยะเวลาในการทำวิจัยตั้งแต่เดือน พฤศจิกายน 2560 – มีนาคม 2561

นิยามศัพท์เฉพาะ

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดของบุคคลที่สามารถจัดความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเหมือนกันเข้าเป็นพวกเดียวกัน โดยสามารถสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของบทนิยาม ทฤษฎีบทและสมบัติต่างๆ ของวิชาคณิตศาสตร์รวมทั้งสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีความเชื่อมโยงกันได้

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจที่แตกต่างจากความเป็นจริงอย่างเป็นระบบซึ่งอาจเกิดจากการรับรู้จากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้องหรือไม่สมบูรณ์และ ไม่ชัดเจนของแต่ละบุคคล

ในการวิจัยครั้งนี้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Graeber (1992) Ciofalo &

Wylie (2010) และ Sukkrom (2014) แบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข เป็นการนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ เป็นการใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์

3. การตีความผิด เป็นการแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง

4. การมีมโนทัศน์ที่จำกัด เป็นการมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง

แบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง แบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง ซึ่งมีประเด็นคำถามเพื่อทำให้ทราบถึงลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 หลังจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

แบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง หมายถึง เครื่องมือในการศึกษาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 มีกำหนดประเด็นข้อคำถามสำหรับการสัมภาษณ์เน้นการสัมภาษณ์เชิงลึก

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษามาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เป็นหลัก และคู่มือครู หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology, 2008) พบว่ามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยสามารถจำแนกได้ดังนี้

ระบบพิกัดฉากสามมิติ มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. พิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติประกอบด้วยแกนสามแกน คือแกน X แกน Y และแกน Z ตั้งฉากซึ่งกันและกัน กำหนดทิศทางของแกนทั้งสามให้เป็นไปตามกฎมือขวา และเรียกจุดตัดของแกนทั้งสามว่าจุดกำเนิด จุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ อธิบายได้ด้วยสามสิ่งอันดับ (ordered triple) เขียนแทนด้วย (x, y, z)

2. ภาพฉาย (projection) บนระนาบในระบบพิกัดฉากสามมิติ กำหนดให้ $P(x, y, z)$ เป็นพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ว่า $Q(x, y,0)$ เป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY $R(0, y, z)$ เป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ และ $S(x,0, z)$ เป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ

3. ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ เท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ หน่วย

ปริมาณเวกเตอร์ มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียวส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางเรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)

2. สมบัติการเท่ากัน การขนานกัน และนิเสธของเวกเตอร์เป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสอง มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกันเขียนแทนด้วย $\overline{u} = \overline{v}$

บทนิยาม $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้าม

บทนิยาม นิเสธ ของ $\overline{u}$ (negative of $\overline{u}$) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\overline{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ $\overline{u}$ เขียนแทนด้วย $-\overline{u}$

การบวกและการลบเวกเตอร์ มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ผลบวกของเวกเตอร์ได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ เลื่อน $\overline{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\overline{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\overline{u}$ ผลบวก ของ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย "$\overline{u} + \overline{v}$" คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\overline{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\overline{v}$

2. ผลลบของเวกเตอร์ได้ตามบทนิยามต่อไปนี้ **บทนิยาม** ให้ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ผลลบ ของ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย $\overline{u}-\overline{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\overline{u}$ และนิเสธของ $\overline{v}$ นั่นคือ $\overline{u}-\overline{v}=\overline{u}+(-\overline{v})$

บทนิยาม เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\overline{0}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

บทนิยาม ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\overline{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ $\overline{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\overline{u}$ โดยที่

1) ถ้า a = 0 แล้ว $a\overline{u}=\overline{0}$

2) ถ้า a > 0 แล้ว $a\overline{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\overline{u}|$ และมีทิศทางเดียวกัน $\overline{u}$

3) ถ้า a < 0 แล้ว $a\overline{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\overline{u}|$ แต่มีทิศทางตรงกับข้ามกับ $\overline{u}$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ในระบบพิกัดฉากสองมิติ สำหรับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใดๆ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A (a_1, a_2) และจุดสิ้นสุดที่ B (b_1, b_2) สามารถเขียนในรูปแบบ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ เมื่อ $x_1 = b_1 - a_1$ และ $x_2 = b_2 - a_2$

ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ถ้า $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ เมื่อ P และ Q มีพิกัดเป็น (p_1, p_2) และ (q_1, q_2) ตามลำดับ $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ (เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{PQ}|$) คือ $\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

สำหรับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใด ๆ ในระบบพิกัดสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่ A (a_1, a_2, a_3) และจุดสิ้นสุดที่ B(b_1, b_2, b_3) จะเขียนแทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ด้วยรูปแบบ

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ เมื่อ $x_1 = b_1 - a_1$, $x_2 = b_2 - a_2$ และ $x_3 = b_3 - a_3$

ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์จากจุด A และ B มีพิกัดเป็น (a_1, a_2, a_3) และ (b_1, b_2, b_3) ตามลำดับ แล้ว $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{bmatrix}$ และ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

บทนิยาม เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) จากบทนิยาม จะได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\overline{u}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{u}$ คือเวกเตอร์ $\frac{\overline{u}}{|\overline{u}|}$

ในระบบพิกัดฉากสองมิติ สำหรับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

โคไซน์แสดงทิศทางมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. **บทนิยาม** ให้ $\overline{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ $\overline{a}$ เทียบกับแกน X, Y, Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|\overline{a}|},\frac{a_2}{|\overline{a}|},\frac{a_3}{|\overline{a}|}$

2. **บทนิยาม** เวกเตอร์สองเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติจะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อ มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงกันข้ามก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

ผลคูณเชิงสเกลาร์มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

ผลคูณเชิงสเกลาร์ หมายถึง ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ซึ่งบทนิยามในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$ ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ เขียนแทนผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v}$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1) ให้ $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสองมิติ หรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1.1 $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$

1.2 $\bar{u}\cdot(\bar{v}+\bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$

1.3 $a(\bar{u}\cdot\bar{v}) = (a\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(a\bar{v})$

1.4 $\bar{0}\cdot\bar{u} = 0$

1.5 $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$

1.6 $\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k} = 1$

1.7 $\bar{i}\cdot\bar{j} = \bar{i}\cdot\bar{k} = \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$

2) ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาด θ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ (มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนานและมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ทั้งสอง)

3) ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หมายถึง ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ ซึ่งนิยามในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ดังนี้

บทนิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

เขียนแทนด้วย $\bar{u}\times\bar{v}$ และ $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

หรือ $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1) กำหนด $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1.1 $\bar{u}\times\bar{v} = -(\bar{v}\times\bar{u})$

1.2 $(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w} = (\bar{u}\times\bar{w}) + (\bar{v}\times\bar{w})$

1.3 $\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}\times\bar{v}) + (\bar{u}\times\bar{w})$

1.4 $\bar{u}\times(k\bar{v}) = k(\bar{u}\times\bar{v})$

1.5 $(k\bar{u})\times\bar{v} = k(\bar{u}\times\bar{v})$

1.6 $\bar{u}\times\bar{u} = \bar{0}$

1.7 $\bar{i}\times\bar{j} = \bar{k},\ \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i},\ \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}$

2) ให้ $\bar{u},\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = (\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$

3) ถ้า $\bar{u}\neq\bar{0}$ และ $\bar{v}\neq\bar{0}$ จะได้ว่า $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ เมื่อมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีขนาด θ โดยที่ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

4) ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกันจะได้ว่า $\bar{u}\times\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

5) การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นด้านที่ไม่ขนานกัน เท่ากับ $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}|\times|\bar{v}|\sin\theta$ ตารางหน่วย

6) การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$ $\bar{v}$ และ $\bar{r}$ เป็นด้าน เท่ากับ $|\bar{u}||\bar{v}\times\bar{r}|\cos\theta$ หรือเท่ากับ $|\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{r})|$ ลูกบาศก์หน่วย

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีการวิจัยเชิงปฏิบัติการ (action research approach) ซึ่งมีทั้งหมด 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน เป็นขั้นตอนในการศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับมาตรฐานการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยศึกษาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ในสามมิติ ดังรายละเอียดในหัวข้อการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยซึ่งเครื่องมือในการวิจัย ประกอบด้วย

2.1 เครื่องมือสำหรับผู้เชี่ยวชาญ คือ แบบประเมินความเหมาะสมของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และแบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีขั้นตอนการพัฒนาเครื่องมือ ดังนี้ 1) สร้างและ 2) นำไปให้ผู้เชี่ยวชาญประเมินแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และแบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2.2 แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย ที่ผู้วิจัยสร้างตามผลการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์โดยจำแนกมโนทัศน์ได้ 4 ประเภท ดังนี้

1) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข

2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์

3) การตีความผิด

4) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด

2.3 แบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยสร้างตามผลการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ เป็นแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง มากำหนดกรอบคำถามเพื่อสัมภาษณ์เชิงลึกเพื่อให้ทราบถึงสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

2.4 นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และแบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตรวจความตรงเชิงเนื้อหา ความถูกต้องของภาษาและความเป็นปรนัยของคำตอบของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์โดยผู้เชี่ยวชาญทางด้านการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 5 ท่าน ประกอบด้วย

1) รองศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2) รองศาสตราจารย์นงนุช สุขวารี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3) รองศาสตราจารย์กิตติ พัฒนตระกูลสุข โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา ข้าราชการบำนาญ

4) อาจารย์ ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม หัวหน้าสาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

5) อาจารย์ พรรณวดี ยืนยงค์นาน ครูชำนาญการ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา พญาไท กรุงเทพมหานคร

2.5 เลือกข้อที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ในสามมิติเท่ากับ 1.00 ซึ่งมีจำนวน 23 ข้อ จากทั้งหมด 30 ข้อ

2.6 นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยเลือกมากำหนดกรอบลักษณะหรือพฤติกรรมที่แสดงออกตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ ดังนี้

1) การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข มีลักษณะหรือพฤติกรรมที่แสดง คือ นิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา

2) ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะหรือพฤติกรรมที่แสดง คือ นิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์

3) การตีความผิด มีลักษณะหรือพฤติกรรมที่แสดง คือ นิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง

4) การมีมโนทัศน์ที่จำกัด มีลักษณะหรือพฤติกรรมที่แสดง คือ นิสิตมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง

2.7 ให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 5 ท่าน (กลุ่มเดียวกับตรวจแบบวัดมโนทัศน์)

ตรวจสอบคุณภาพและตรวจความตรงเชิงเนื้อหา อีกครั้ง เพื่อให้มั่นใจว่าแบบวัดสามารถวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ได้

2.8 ผู้วิจัยทบทวนเนื้อหาของเวกเตอร์ในสามมิติ ตามหัวข้อการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องให้แก่นิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 5 ปี การศึกษา 2560 จำนวน 16 คน เป็นเวลา 2 สัปดาห์

2.9 นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญแล้วไปทดลองใช้กับนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 5 ปีการศึกษา 2560 จำนวน 16 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่น ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.8571

2.10 นำแบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญแล้วไปทดลองใช้กับนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 5 ปีการศึกษา 2560 จำนวน 6 คน ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง พบว่า แบบสัมภาษณ์สามารถใช้สัมภาษณ์นิสิตในเชิงลึกได้จริง

ขั้นตอนที่ 3 การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตอนขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1 ผู้วิจัยทบทวนเนื้อหาของเวกเตอร์ในสามมิติ ตามหัวข้อการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องให้แก่นิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 ปีการศึกษา 2560 จำนวน 19 คน เป็นเวลา 2 สัปดาห์

3.2 ผู้วิจัยนำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตไปใช้ทดสอบกับนิสิตชั้นปีที่ 4 จำนวน 19 คน ที่เป็นกลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย แล้วเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมด มาทำการวิเคราะห์ เพื่อตรวจหาความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

3.3 ผู้วิจัยนำแบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ สัมภาษณ์เชิงลึกกับนิสิตกลุ่มที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ในแต่ละคน โดยชื่อนิสิตที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนามสมมุติเพื่อรักษาสิทธิของกลุ่มที่ศึกษา

3.4 นำผลการตรวจหาความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และผลการสัมภาษณ์เชิงลึกกับนิสิต แยกตามประเภทมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ พร้อมทั้งวิเคราะห์ถึงลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ในแต่ละประเภท

ขั้นตอนที่ 4 การวิเคราะห์ข้อมูลและสรุปผลการวิจัย

ในการวิเคราะห์ข้อมูลของการวิจัยนี้ ใช้การวิเคราะห์ข้อมูลทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ โดยการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณจะนำคะแนนที่ได้จากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตโดยใช้ สถิติความถี่ ร้อยละ ส่วนการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพวิเคราะห์เชิงเนื้อหาจากข้อมูล คำตอบ เหตุผล ที่นิสิตตอบในแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และการสัมภาษณ์นิสิตที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เพื่อพิจารณาลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

ผลการวิจัย

การนำเสนอผลวิจัยครั้งนี้ แบ่งเป็น 2 ตอน ได้แก่ ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ตอนที่ 2 ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

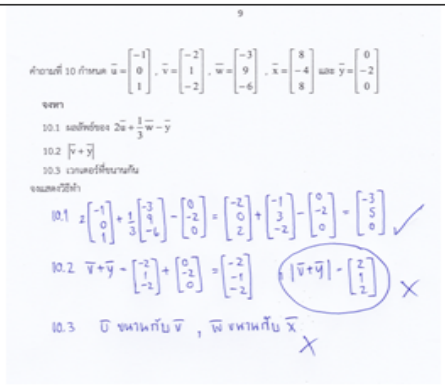
ตอนที่ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติการนำเสนอผลการวิจัยในส่วนนี้ จะเป็นการนำเสนอข้อมูลในภาพรวมของประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์กับเนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติที่ได้จากนิสิตชั้นปีที่ 4 ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงร้อยละ ของนิสิตที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

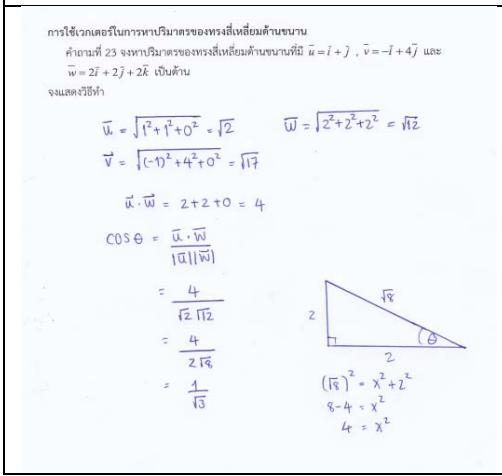
เนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ	ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์				รวม
	การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข	ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์	การตีความผิด	การมีมโนทัศน์ที่จำกัด	
	ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ	ร้อยละ
ระบบพิกัดฉากสามมิติ	-	25.86	43.10	31.04	100
การบวกและการลบเวกเตอร์	-	44.26	31.15	24.59	100
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	-	26.66	35.56	37.78	100
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	-	20	20	60	100
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ	13.33	11.11	26.67	48.89	100
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	17.86	17.86	28.57	35.71	100
โคไซน์แสดงทิศทาง	-	28	40	32	100
ผลคูณเชิงสเกลาร์	28.77	30.14	13.70	27.39	100
ผลคูณเชิงเวกเตอร์	27.12	22.03	23.73	27.12	100
การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	33.33	23.33	21.67	21.67	100
การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน	21.32	19.67	39.34	19.67	100
รวม	**15.57**	**25.58**	**29.23**	**29.62**	**100**

จากตารางที่ 1 พบว่า นิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 ทั้งหมด จำนวน 19 คนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ที่มากสุดคือ ประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัดคิดเป็นร้อยละ 29.62 ของจำนวน มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ทั้งหมดที่เกิดขึ้น รองลงมา คือ ประเภทการตีความผิด คิดเป็นร้อยละ 29.23 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ทั้งหมดที่เกิดขึ้น และ ประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 25.58 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ทั้งหมดที่เกิดขึ้นและประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ น้อยที่สุด คือ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขโดยมีคิดเป็นร้อยละ 15.57 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ทั้งหมดที่เกิดขึ้น แสดงตัวอย่างคำตอบของนิสิตดังตารางที่ 2 3 4และ5 ตามลำดับ

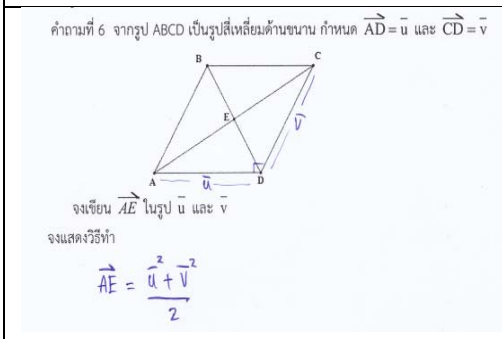
ตารางที่ 2 แสดงตัวอย่างคำตอบของนิสิตที่มีประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ การมีมโนทัศน์ที่จำกัด

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์
	จากข้อ 10.2 นิสิตสามารถหาผลบวกของ เวกเตอร์ $\bar{v}+\bar{y}$ ได้แต่มีมโนทัศน์ว่า $\lvert\bar{v}+\bar{y}\rvert$ เป็นค่า สัมบูรณ์ของจำนวนจริง ดังนั้นคำตอบที่ได้คือ $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ วิธีการที่ถูกต้อง ดังนี้ $\bar{v}+\bar{y}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-2\end{bmatrix}$ $\lvert\bar{v}+\bar{y}\rvert=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}$ $=\sqrt{4+1+4}$ $=\sqrt{9}$ $=3$ แสดงว่านิสิตมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง

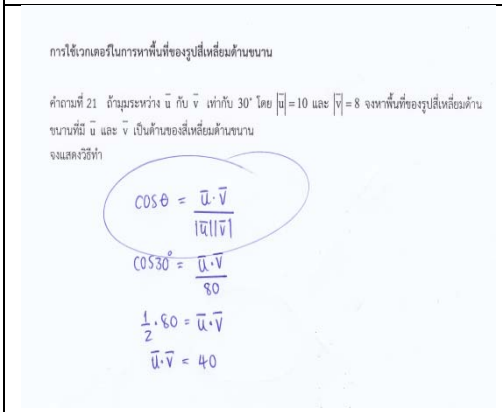
ตารางที่ 3 แสดงตัวอย่างคำตอบของนิสิตที่มีประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์การตีความผิด

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์
	นิสิตตอบไม่ตรงคำถาม โดยไปหาค่าของ $\cos\theta$ แทน การหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานแสดงว่านิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง

ตารางที่ 4 แสดงตัวอย่างคำตอบของนิสิตที่มีประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์
	นิสิตมีมโนทัศน์ การหา $\overline{AE}$ นิสิตเข้าใจว่ารูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีสมบัติเหมือนกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นิสิตจึงให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{CD}$ เป็นด้านประกอบมุมฉาก จากนั้นนิสิตใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสหา $\overline{AE}$ แทนการหาเวกเตอร์ผลลัพธ์โดยใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน วิธีการที่ถูกต้อง ดังนี้ $\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}(\vec{u}+(-\vec{v}))=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ แสดงว่านิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์

ตารางที่ 5 แสดงตัวอย่างคำตอบของนิสิตที่มีประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์
	นิสิตมีมโนทัศน์ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ มีค่าเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานวิธีนี้ไม่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา แนวทางแก้ปัญหาควรใช้วิธีการดังนี้ $\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert=\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีด้านที่ไม่ขนานกันยาว $\lvert\vec{u}\rvert$ และ $\lvert\vec{v}\rvert$ หน่วย $\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert=\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\sin\theta$ $=10(8)\sin 30^\circ$ $=80\times\frac{1}{2}$ $=40$ ตารางหน่วย แสดงว่านิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา

ตอนที่ 2 ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ การนำเสนอผลการวิจัยในส่วนนี้ จะเป็นการนำเสนอข้อมูลลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของแต่ละประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์กับเนื้อหา เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติที่ได้จากนิสิตชั้นปีที่ 4 ดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 ลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

เนื้อหาเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ	**ลักษณะที่แสดงของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแต่ละประเภท**			
	1.การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข	**2. ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์**	**3. การตีความผิด**	**4. การมีมโนทัศน์ที่จำกัด**
	นิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา	**นิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์**	**นิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง**	**นิสิตมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง**
	ร้อยละ	**ร้อยละ**	**ร้อยละ**	**ร้อยละ**
ระบบพิกัดฉากสามมิติ	-	11.28	**16.44**	11.69
การบวกและการลบเวกเตอร์	-	**20.30**	**12.50**	9.74
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	-	9.02	10.52	11.04
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	-	0.75	0.67	1.95
เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ	7.41	3.76	7.9	14.29
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	6.17	3.76	5.26	6.49
โคไซน์แสดงทิศทาง	-	5.26	9.21	5.19
ผลคูณเชิงสเกลาร์	**25.93**	16.54	6.58	12.99
ผลคูณเชิงเวกเตอร์	19.75	9.78	9.21	10.39
การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน	24.69	10.53	8.55	8.44
การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน	16.05	9.02	13.16	7.79
รวม	**100.00**	**100.00**	**100.00**	**100.00**

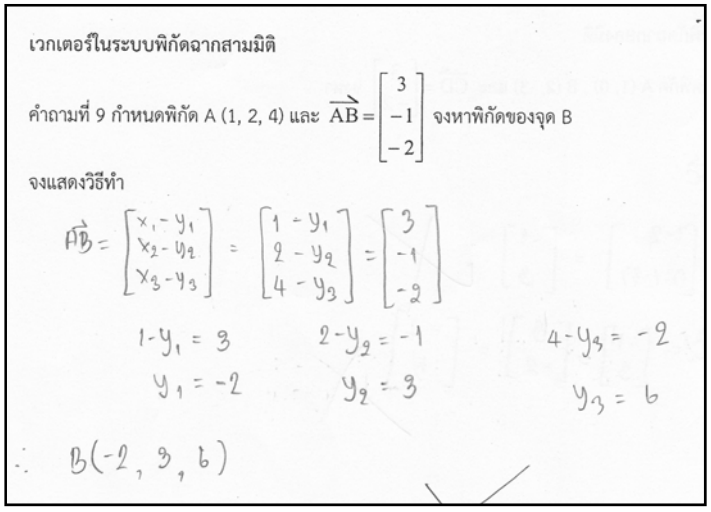
จากตารางที่ 6 พบว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ในสามมิติ ประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตมีลักษณะดังนี้ นิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา เนื้อหาที่พบมากที่สุด คือ ผลคูณเชิงสเกลาร์ คิดเป็นร้อยละ 25.93 ประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตมีลักษณะดังนี้ นิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์ เนื้อหาที่พบมากที่สุด คือ การบวกและการลบเวกเตอร์คิดเป็นร้อยละ 20.30 ประเภทการตีความผิด มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตที่มากที่สุด มีลักษณะดังนี้ นิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของ

ข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง เนื้อหาที่พบมากที่สุด คือ ระบบพิกัดฉากสามมิติคิดเป็นร้อยละ 16.44 และประเภท การมีมโนทัศน์ที่จำกัด มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของนิสิตมีลักษณะ ดังนี้ นิสิติมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง เนื้อหาที่พบมากที่สุด คือ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ คิดเป็นร้อยละ 14.29

อภิปรายผล

จากผลการวิจัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนิสิตสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 4 โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. นิสิตมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มากที่สุด คือ การมีมโนทัศน์ที่จำกัด มีลักษณะดังนี้ นิสิตมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้องคิดเป็นร้อยละ 29.62 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดที่เกิดขึ้น ส่วนมากเกิดขึ้นในเนื้อหาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ (ร้อยละ 14.29) ผลคูณเชิงสเกลาร์ (ร้อยละ 12.99) และระบบพิกัดฉากสามมิติ (ร้อยละ 11.69) ตามลำดับ จากการวิจัยพบตัวอย่างดัง ภาพที่ 1



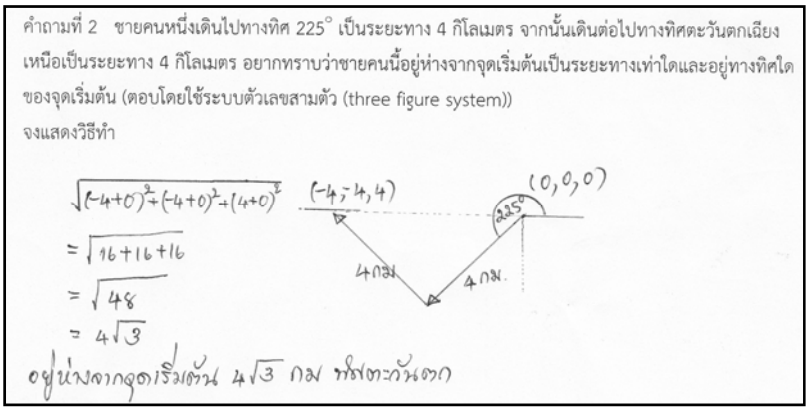
ภาพที่ 1 แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ กรณีที่ นิสิตมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้องของ ก (นามสมมุติ)

นิสิตใช้วิธีการแก้ปัญหายังไม่ถูกต้องโดยเข้าใจว่าเวกเตอร์ AB หาได้จากพิกัดของจุด $A(1,3,4)$ ลบด้วยพิกัดของจุด $B(y_1,y_2,y_3)$ สอดคล้องกับงานวิจัย Aina & Tetyana (2013) พบว่านักศึกษาปีที่ 1 ของ Ohio State University มีความคลาดเคลื่อนของเวกเตอร์สองประเภท ได้แก่ ประเภทที่ 1 การดำเนินการของเวกเตอร์และภาพฉายของเวกเตอร์ ประเภทที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนของปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์ สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัด ส่วนหนึ่งมาจากนิสิตมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องเพียงบางส่วน และเกิดจากการเรียนรู้ตั้งแต่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ

ที่เกิดจากประสบการณ์และการประยุกต์ใช้มโนทัศน์ที่ไม่สมบูรณ์จนเป็นความเคยชิน และเกิดความเข้าใจว่ามโนทัศน์ที่ตนมีนั้นถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับ Mestre (1987) ที่ได้กล่าวว่า นักเรียนเรียนรู้ข้อมูลถูกต้องเพียงบางส่วนจากประสบการณ์ในแต่ละวัน จนสร้างเป็นความเข้าใจที่ฝังลึกซึ้งกลายเป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และอาจรวมไปถึงการจัดการเรียนการสอนในห้องเรียน บางครั้งด้วยเวลาที่จำกัด ทำให้ครูอาจไม่มีโอกาสได้ย้ำในประเด็นสำคัญให้แก่นักเรียน

2. นิสิตมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ในสามมิติ ประเภทการตีความผิด คิดเป็นร้อยละ 29.23 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดที่เกิดขึ้น มีลักษณะดังนี้ นิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง ส่วนมากเกิดในเนื้อหา ระบบพิกัดฉากสามมิติ (ร้อยละ 16.44) โคไซน์แสดงทิศทาง (ร้อยละ

9.21) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ร้อยละ 9.21) ตามลำดับ จากการวิจัยพบตัวอย่างดังภาพที่ 2



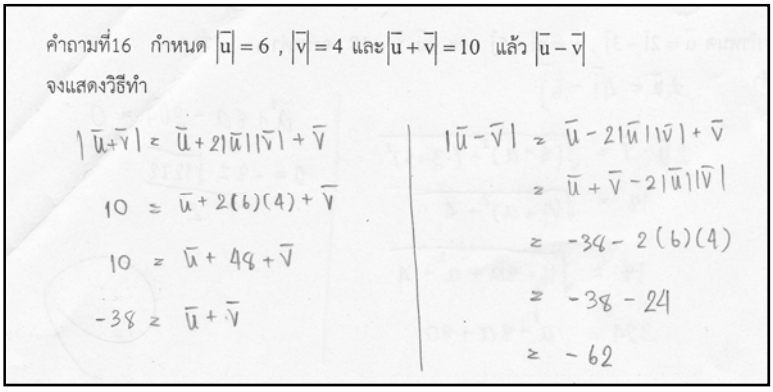
ภาพที่ 2 แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ กรณี นิสิตแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริงของ ข (นามสมมุติ)

นิสิตแปลความหมายสิ่งที่โจทย์ต้องการไม่ตรงกับความเป็นจริงโดยเขียนเป็นสามสิ่งอันดับในรูป $(-4,-4,4)$ แทนการเขียนเวกเตอร์แสดงทิศทางสอดคล้องกับงานวิจัย Pablo และ Genaro (2014) ได้ทำการศึกษานักศึกษาที่ Mexican University จำนวน 972 คน ผลการวิจัยพบว่านักศึกษามีความคลาดเคลื่อนการตีความที่ผิดในเรื่องการเขียนสัญลักษณ์ของเวกเตอร์และการสื่อความหมายของเวกเตอร์ การคำนวณในเรื่อง การบวกเวกเตอร์คิดเป็นร้อยละ 7 การลบเวกเตอร์คิดเป็นร้อยละ 8 การคูณเวกเตอร์ด้วย

สเกลาร์ คิดเป็นร้อยละ 4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ คิดเป็นร้อยละ 47 และผลคูณเชิงเวกเตอร์คิดเป็นร้อยละ 21 สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ประเภทการตีความผิดในลักษณะแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง อาจเกิดจากการเรียนการสอนที่ผ่านมาไม่ได้ให้ความสำคัญกับการเขียนสัญลักษณ์ของเวกเตอร์ทำให้แปลความหมายไม่ถูกต้อง หรืออาจมาจากการขาดการฝึกฝนในด้านการแก้โจทย์ปัญหา เนื่องจากโจทย์ปัญหามีเนื้อหาที่ซับซ้อนไม่ได้ให้ข้อมูลโดยตรงที่สามารถหาคำตอบได้ทันที จำเป็นที่ผู้เรียนจะต้องพิจารณาและตีความโจทย์อย่างละเอียด สอดคล้องกับ Makanong (1993) กล่าวว่านักเรียนขาดทักษะในการตีความจากโจทย์ โจทย์ที่มีระดับความยากสูงมักจะไม่ให้ข้อมูลที่นักเรียนต้องการใช้โดยตรง แต่มักให้ในรูปความสัมพันธ์กับตัวแปรอื่น ซึ่งนักเรียน

ต้องพยายามตีความในส่วนนี้ เพื่อให้ได้ข้อมูลตรงกับที่ต้องการใช้ โดยอ่านโจทย์หลายๆ ครั้งให้เข้าใจ

3. นิสิตมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของเวกเตอร์ในสามมิติ ในประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 25.58 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้น มีลักษณะดังนี้ นิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์ ส่วนมากเกิดขึ้นในเนื้อหาการบวกและการลบเวกเตอร์(ร้อยละ 20.30) ผลคูณสเกลาร์ (ร้อยละ 16.54) และระบบพิกัดฉากสามมิติ (ร้อยละ11.28) ตามลำดับ จากการวิจัยพบตัวอย่างดังภาพที่ 3

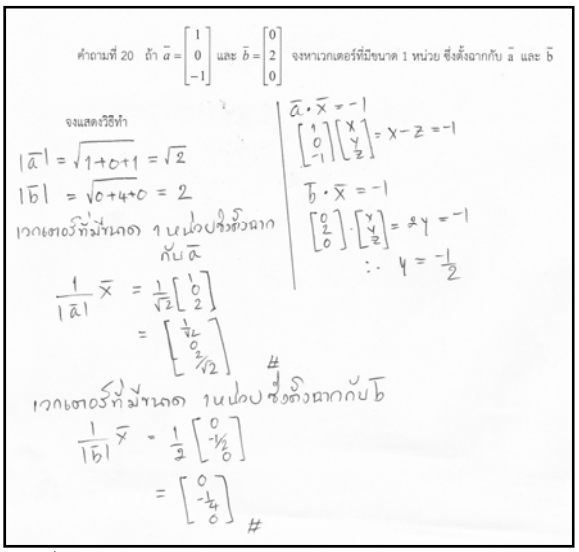


ภาพที่ 3 แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ กรณี นิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์ของ ค (นามสมมุติ)

นิสิตมีแนวทางที่แก้ปัญหาได้ แต่มีมโนทัศน์เกี่ยวกับกำลังสองสมบูรณ์ไม่ถูกต้อง โดยที่ ใช้ $|\bar{u}+\bar{v}|=\bar{u}+2|\bar{u}||\bar{v}|+\bar{v}$ ที่ถูกต้องคือ $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$ สอดคล้องกับงานวิจัย Ngoc-Loan และ David (2003) ได้ทำการวิจัยนักศึกษาจำนวน 2031 คน ที่เริ่มเรียนในสัปดาห์แรกวิชาแคลคูลัสพื้นฐาน สำหรับวิชาฟิสิกส์ในเรื่องเวกเตอร์ของ Iowa state University พบว่านักศึกษาร้อยละ 9 มีความคลาดเคลื่อน การบวกและลบเวกเตอร์ เกิดจากการเข้าใจผิดของจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ลัพธ์ นักศึกษา ร้อยละ 20 มีความคลาดเคลื่อนสมบัติของเวกเตอร์ที่ขนานกันและเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ในลักษณะนิสิตใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความรู้ทางพีชคณิตหรือเรขาคณิตพื้นฐานที่จำเป็นไม่ครบสมบูรณ์อาจเนื่องมาจาก การจัดการเรียนการสอนรวมไปถึงข้อสอบหรือแบบฝึกหัดในชั้นเรียน เน้นไปที่ความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการซึ่งเป็นความรู้เกี่ยวกับการคำนวณและขั้นตอนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์มากกว่าการมุ่งเน้นเรื่องมโนทัศน์ โดยสอดคล้องกับ Makanong (2011:6-7) ได้กล่าวไว้ว่า ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป มักเน้นการสอนความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ ส่วนการสอนความรู้เชิงมโนทัศน์มีน้อย ในการจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนบางครั้งมีเวลาที่จำกัด ทำให้ครูไม่มีโอกาสได้เน้นย้ำเรื่องมโนทัศน์ที่ถูกต้องให้แก่นักเรียน ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนควรเน้นการสอนมโนทัศน์ สอดคล้องกับงานวิจัยของ Nuangwong (2016) ได้วิจัย ความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอด เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยการเสริมเทคนิค การประเมินเพื่อพัฒนาในการจัดการเรียนรู้ ผลการวิจัย พบว่า การจัดการเรียนรู้ที่เสริมด้วยเทคนิคการประเมินเพื่อพัฒนาในการส่งเสริมความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอด

ซึ่งประกอบด้วยขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป โดยขั้นนำเป็นการนำ ผลการวิเคราะห์ข้อมูลในคาบก่อนหน้าที่พบทั้งความเข้าใจคลาดเคลื่อน การเขียนสัญลักษณ์ที่ไม่ถูกต้อง รวมถึงคำถามที่นักเรียนสงสัยมาให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจมากขึ้นและแก้ไขสิ่งที่เข้าใจคลาดเคลื่อนนั้น รวมถึงการทบทวนความรู้เดิมโดยการถามตอบปากเปล่าระหว่างครูและนักเรียน เพื่อนำไปสู่การเชื่อมโยงความรู้ใหม่ในคาบ ในขั้นสอนมีการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนที่เกิดขึ้นผ่านเทคนิคการประเมินเพื่อพัฒนา ทั้งเทคนิคที่เน้นกิจกรรมรายบุคคลและเทคนิคที่เน้นกิจกรรมแบบความร่วมมือ ซึ่งใช้ในระหว่างสอนและหลังจากสอนเสร็จและให้ทำใบกิจกรรม และขั้นสุดท้าย คือ ขั้นสรุปเป็นการเสริมด้วยเทคนิคที่เน้นกิจกรรมรายบุคคลเพื่อให้นักเรียนได้สรุปความเข้าใจหรือความคิดรวบยอดอีกครั้ง

4. นิสิตมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ในประเภทการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข คิดเป็นร้อยละ 15.57 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้น มีลักษณะดังนี้ นิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา ส่วนมากเกิดขึ้นในเนื้อหา ผลคูณเชิงสเกลาร์ (ร้อยละ 25.93) การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ร้อยละ 24.69) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ (ร้อยละ 19.75) ตามลำดับ จากการวิจัยพบตัวอย่างดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 แสดงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ กรณี นิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตรหรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการ แก้ปัญหา ของ ง (นามสมมุติ)

นิสิตมีมโนทัศน์ $\bar{a}$ ตั้งฉากกับ $\bar{b}$ มีลักษณะเหมือนกับเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นมีค่าเท่ากับ -1 ซึ่งในความเป็นจริงไม่สามารถใช้ได้ในกรณีเวกเตอร์สามมิติได้ การแก้ปัญหาควรเป็นดังนี้ จากสมบัติ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ สอดคล้องงานวิจัยของ Genaro & Pablo (2010) ได้ทำการศึกษานักศึกษาที่ Mexican University จำนวน 409 คน ผลการวิจัยพบว่านักศึกษามีการนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับส่วนประกอบของเวกเตอร์ ร้อยละ 8 และการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานร้อยละ 14 สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในประเภทการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข ในลักษณะนิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหาเวกเตอร์ อาจมาจากประสบการณ์การเรียนรู้เดิมของนิสิตตั้งแต่มัธยมศึกษาสอดคล้องกับงานวิจัยของ Matrakool (2008) การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุนวิทยาคม จังหวัดพะเยา ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้ พบว่านักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือ จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติผิด ขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติที่เหมาะสมมาใช้และประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติไม่ถูกต้อง ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษามักเป็นการสอนที่ให้ผู้เรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง แต่ไม่ได้เน้นให้ผู้เรียนให้แสดงเหตุผลหรือแนวคิดประกอบ จึงทำให้ผู้เรียนเข้าใจเพียงขั้นตอนหาคำตอบเท่านั้น แต่ผู้เรียนจะไม่เข้าใจที่มาของทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยามต่างๆ สอดคล้องกับ The IPST (2012:129) ได้กล่าวว่า วิธีการจัดการเรียนการสอนของครูคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มุ่งเน้นที่การสอนเนื้อหาและทักษะการคำนวณ โดยบอกวิธีทำ ให้ตัวอย่างและให้ผู้เรียนทำตามตัวอย่างโดยไม่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิดและค้นหาความรู้หรือวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเอง ดังนั้นจึงส่งผลให้นิสิตนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องไปใช้ในการแก้ปัญหา

ข้อเสนอแนะจากการวิจัย

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการวิจัยไปใช้ จากผลการวิจัย พบว่า นิสิตส่วนมากมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัดและการตีความผิดมีค่า ร้อยละ ใกล้เคียงกันและมากที่สุด ดังนั้นควรมีการทบทวน เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ให้แก่ นิสิตก่อนที่จะออกไปฝึกประสบการณ์วิชาชีพครู เพื่อ ให้นิสิตมีความมโนทัศน์ใน เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติเพียงพอต่อการนำไปใช้อย่างถูกต้องและการแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลตามความเป็นจริง จะช่วยให้นิสิตที่จะเป็นครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาที่สามารถสอนและปลูกฝังให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติที่ถูกต้อง และที่สำคัญความรู้เชิง

มโนทัศน์จะช่วยให้นิสิตเข้าใจขั้นตอนหรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาของนิสิตหรือนักศึกษาศึกษาศาสตร์และครุศาสตร์ก่อนที่จะไปฝึกสอน

2. ควรหากลวิธีที่จะพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาของนิสิตหรือนักศึกษาศึกษาศาสตร์และครุศาสตร์ก่อนที่จะไปฝึกสอน

References

Aina, A. & Tetyana, B. (2013). *Commonly Identified Students' Misconception about Vectors and Vector Operation*. Columbus, OH: The Ohio State University.

Angganpattarakajorn, V. (2014). A study on Mathematical concept of mathematics major students. *Journal of Education Burapa university* 25(2), pp93-108. [in Thai]

Ciofalo, W. A. (2010). *DIMS Exemplar Set of Items 8th-Grade Mathematics*. Educational Testing Service.

Dechakupt, P. (2015). *Learning Management in 21st Century*. Bangkok: Chulalongkorn University. [in Thai]

Genaro, Z. & Pablo, B. (2010). Students' Understanding of the Concepts of Vector Components and Vector Products. *Physics Education Research and Innovation Group Department of Physics, Technologic de Monterrey, Campus Monterrey.* Mexico.

Graeber, O. A. (1992). *Methods and Materials for Preservice Teacher Education in Diagnostic and Prescriptive Teaching of Secondary Mathematics: Project Final Report* (4-51). U.S.A: University of Maryland.

Kasemsukpipat, W. (2016). The Readiness in Mathematics Pedagogical Content Knowledge of Pre-service Teachers. *Journal of Education Kasetsart Review,* 31(3), pp. 144-152 [in Thai]

Makanong. A. (1993) *Diagnosis of mathematics Learning deficiency of Mathayom Suksa fine student of Chulalongkorn Univesity Demonnstration School*. Bangkok: Chulalongkorn University. [in Thai]

_____. (2011). *Skills and Processes in Mathematics: Faculty of Education*, Chulalongkorn University. [in Thai]

_____. (2014) *Mathematics for High School Teachers,* Faculty of Education, Chulalongkorn University. [in Thai]

Matrakool, W. (2008). *Diagnosis of Mathematics Learning Deficiencies on Vectors in Three Dimensional Space of MathayomSuksa 4 Students at Chun Wittayakom School, Phayao Province*. Master of Education (Mathematics Education). Chiang Mai Uiversity. [in Thai]

Mestre, J. (1987). Why should mathematics and science teachers be interested in cognitive research findings? *Academic Connections* (pp. 3-5). New York: The College Board.

National Institute of Educational Testing Service. Ordinary National Educational Test (O-NET) .2013-2016. Retrived from https://bit.ly/2cKBCOW.[in Thai]

Ngoc-Loan, N. & David, M. E. (2003). Initial understand of vector concept among students in introductory physic courses. *Department of Physics and Astronomy, Iowa State University, Ames,* Iowa, 630-638.

Nuangwong, W. (2016) *Conceptual Understanding on Vectors in Three Dimensional Space of Grade 11 Students by Supplementing Formative Assessment Techniques in Learning Provision*. Master Degree Thesis of Education in Mathematics Education, Chiang Mai University. [in Thai]

Pablo, B. & Genaro, Z. (2014). Students' difficulties in problem that involve unit-vector notation. *Physics Education Research and Innovation Group Department of Physics, Tecnologico de Monterrey, Campus Monterrey.* Mexico, 4403, 1-10.

Sukkrom, P. (2014). *A study of misconceptions and mistakes in athematics of eleventh grade students in schools under the Secondary Educational Service Area Office 1 and 2. M*aster Degree Thesis of Education in Mathemitics Education. Chulalangkorn University. [in thai]

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST). (2008). *Book of Basic Mathematics Lesson 1*, Grades 4-6, Mathematics Learning Group According to the Core Curriculum, basic education. [in Thai]

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012). *Math Teacher The Path to Success*: 3Q Media Co., Ltd. [in Thai]

_____. (2016) PISA 2015 Assessment Results Science, Reading and Mathematics. Retrived from https://bit.ly/2uTQUOf. [in Thai]