

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนรู้ด้วยแนวคิด

Concrete-Pictorial-Abstract (CPA)

The Study of Mathematical Problem-Solving Ability on Conic Section  
of Mathayomsuksa Four Students on Concrete-Pictorial-Abstract (CPA)

ปริญญา กุลจันทิก<sup>1</sup> ทรงชัย อักษรคิด<sup>2</sup> ชานนท์ จันทร์<sup>3</sup> สกล ตั้งเก้าสกุล<sup>4</sup>

Parinya Kunjanthuek, Songchai Ugsonkid, Chanon Chuntra and Sakon  
Tangkawsakul

**บทคัดย่อ (Abstract)**

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนรู้ด้วยแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) ประชากรของการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนระยองวิทยาคม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวน 80 คน และกลุ่มตัวอย่างของการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนระยองวิทยาคม จำนวน 1 ห้องเรียน คือ ห้อง ม.4/6 จำนวนนักเรียน 40 คน ได้มาโดยวิธีการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย และเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย การวิเคราะห์ข้อมูล ใช้การคำนวณค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสถิติทดสอบค่าที ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนที่ผ่านการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เรื่อง ภาคตัดกรวย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

**คำสำคัญ (Keywords):** Concrete-Pictorial-Abstract (CPA); ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์; ภาคตัดกรวย

---

Received: 2023-07-01 Revised: 2023-07-17 Accepted: 2023-07-19

<sup>1</sup> คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, Faculty of Education, Kasetsart University.

Corresponding Author E-Mail: parinya.kunj@ku.th

<sup>2</sup> คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, Faculty of Education, Kasetsart University.

<sup>3</sup> คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, Faculty of Education, Kasetsart University.

<sup>4</sup> คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, Faculty of Education, Kasetsart University.

## Abstract

The purpose of this study was to study the mathematics problem-solving ability on Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) on conic section of Mathayomsuksa four students. The population of this study were 80 Mathayomsuksa 4 students of the 2022 academic year at Rayongwittayakom School. The sample of this study were 40 Mathayomsuksa 4/6 students who were selected by using cluster sampling. The research instruments consisted of lesson plans designed by using Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) on conic section of Mathayomsuksa four students and a mathematics problem-solving ability test on conic section. Percentage, mean, standard deviation, and t-test were used for analyzing data. The results of the study found that the mathematics problem-solving ability of students on Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) on conic section was higher than 70 percent at the .05 level of significance.

**Keywords:** Concrete-Pictorial-Abstract (CPA); mathematics problem-solving ability; conic section

## บทนำ (Introduction)

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ อันเป็นรากฐาน ในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัย และสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, 2560) จะเห็นได้ว่าคณิตศาสตร์มีความสำคัญกับชีวิตมนุษย์ ช่วยให้มนุษย์มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารและการสื่อความหมาย การเชื่อมโยง และมีความคิดสร้างสรรค์ สามารถเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาในบริบทของชีวิตจริงได้ ประกอบกับความก้าวหน้าอย่างรวดเร็วของเทคโนโลยี จึงทำให้ต้องมีการแยกแยะข้อมูล เพื่อนำไปใช้ในการตัดสินใจในบริบทที่หลากหลายอย่างถูกต้องเหมาะสม มีการวิเคราะห์ปัญหารวมถึงสถานการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างถี่ถ้วน และมีความรอบคอบ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต ด้วยเหตุนี้ ในแต่ละสถานศึกษาจะใช้คณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบหลักในการจัดการเรียนรู้ เพื่อสร้างพื้นฐานการคิดสำหรับการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นหนึ่งในสมรรถนะสำคัญของผู้เรียนในหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน ที่ต้องเกิดขึ้นหลังจากการพัฒนาผู้เรียนให้บรรลุมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนด ซึ่งสมรรถนะที่สำคัญของผู้เรียน ประกอบด้วย ความสามารถในการสื่อสาร ความสามารถในการคิด ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต และความสามารถในการใช้ เทคโนโลยี (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, 2551) นอกจากนี้ ในหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 รวมถึงตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการ เรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ได้กำหนดให้นักเรียนเกิดทักษะและกระบวนการทาง คณิตศาสตร์ในการเรียนคณิตศาสตร์ตามตัวชี้วัดต่าง ๆ ซึ่งทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การแก้ปัญหา การสื่อสาร และการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การ ให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน, 2560) ดังนั้น ความสามารถในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นหนึ่งในสมรรถนะสำคัญของผู้เรียนในหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน และเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตามตัวชี้วัดต่าง ๆ ใน หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จึงเป็นสิ่งสำคัญที่ต้องเกิดขึ้นกับผู้เรียน และเป็นสิ่งสำคัญในการจัดการเรียนการสอน

การทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เป็นการ ทดสอบเพื่อวัดความรู้และความคิดของนักเรียน ประเมินตามมาตรฐานการเรียนรู้ในหลักสูตร แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ในรายวิชาสังคมศึกษาฯ คณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภาษาไทย และวิทยาศาสตร์ การทดสอบนี้จึงสามารถสะท้อนถึงสมรรถนะของผู้เรียน ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาด้วย เนื่องจากสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน เป็นสิ่งที่ต้องเกิดขึ้น หลังจากการพัฒนาผู้เรียนให้บรรลุมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนด และในการทดสอบทางการศึกษา ระดับชาติขั้นพื้นฐาน O-NET ปีการศึกษา 2564 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนคณิตศาสตร์ระดับประเทศ ได้คะแนนเฉลี่ย 21.28 (สถาบันทดสอบทางการศึกษา แห่งชาติ, 2565) โดยจะเห็นได้ว่านักเรียนได้คะแนนเฉลี่ยรายวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ จาก การวิเคราะห์ปัจจัยหรือตัวแปรที่มีอิทธิพลหรือส่งผลกระทบต่อผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้น พื้นฐาน ของสถานศึกษาในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน พบว่า หนึ่งในปัจจัย สำคัญที่ส่งผลกระทบต่อผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน คือ ด้านกระบวนการจัดการ เรียนการสอน ในสถานศึกษาที่ได้คะแนนสูง ได้มีการนำเทคโนโลยีทางการศึกษาที่ทันสมัยเข้ามาช่วย พัฒนาการจัดการเรียนรู้ ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดสมรรถนะที่สำคัญ ในช่วงเรียนจะเป็นการสอน พื้นฐานและให้แบบฝึกหัด โดยครูคอยส่งเสริมเป็นรายบุคคลหรือแบ่งกลุ่มย่อยมอบหมายงานให้ ผู้เรียนเกิดความต้องการที่จะใฝ่หาความรู้เพื่อแก้ปัญหา ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตัวเอง มีการจัดกิจกรรมที่หลากหลายและเหมาะสมกับผู้เรียน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2562) ซึ่งจากสาเหตุดังกล่าว ผู้วิจัยจึงค้นหาวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาวิชา คณิตศาสตร์ ที่ส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะในการคิดวิเคราะห์ สามารถแก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบ และมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น

ในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้สูงขึ้นนั้น ผู้เรียนจะต้องได้รับประสบการณ์จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เหมาะสม เป็นลำดับขั้น โดยการให้ผู้เรียนลงมือทำด้วยตนเอง และคำนึงถึงพัฒนาการทางด้านร่างกายและสติปัญญาของผู้เรียน ซึ่งหนึ่งในแนวคิดที่มีกระบวนการเรียนการสอนที่สามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนได้ดี คือ การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) ซึ่งเป็นการจัดการเรียนรู้ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในประเทศสิงคโปร์ โดยการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด CPA แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน คือ ขั้น Concrete เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้จากการเห็นของจริง เป็นสิ่งที่จับต้องหรือสัมผัสได้ ขั้น Pictorial เป็นขั้นที่ผู้เรียนนึกภาพ มองเห็นภาพ หรือการแสดงแทน และขั้น Abstract เป็นขั้นที่ใช้สัญลักษณ์เชิงนามธรรม ซึ่งมีแนวคิดพื้นฐานหลักจากทฤษฎีการเรียนรู้ของ Bruner (1966) ที่ได้กล่าวถึงแนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ของมนุษย์ แบ่งได้เป็น 3 ขั้น คือ ขั้นการเรียนรู้จากการกระทำ (Enactive) คือขั้นของการเรียนรู้จากการใช้ประสาทสัมผัสรับรู้สิ่งต่าง ๆ โดยการเรียนรู้เกิดจากการกระทำ ขั้นการเรียนรู้จากความคิด (Iconic) เป็นขั้นที่สามารถสร้างมโนภาพเองได้ จึงสามารถเรียนรู้จากภาพแทนของจริงได้ และขั้นการเรียนรู้สัญลักษณ์และนามธรรม (Symbolic) เป็นขั้นการเรียนรู้สิ่งที่ซับซ้อนและเป็นนามธรรมได้ โดยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด CPA สามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี (Hui, Hoe and Lee, 2017)

จากการพิจารณาเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งอยู่ในบทเรียน เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นคณิตศาสตร์เพิ่มเติมสาระการวัดและเรขาคณิต เป็นเนื้อหาที่ค่อนข้างยาก มีโจทย์ปัญหาและวิธีการหาคำตอบที่หลากหลาย นักเรียนจึงต้องอาศัยประสบการณ์จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เหมาะสม โดยการให้นักเรียนลงมือทำด้วยตนเองอย่างเป็นลำดับขั้น มีการเรียนรู้จากสื่อที่เป็นรูปธรรม การเขียนกราฟเป็นภาพ การใช้สัญลักษณ์เชิงนามธรรม และสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและมีประสิทธิภาพ ด้วยเหตุผลข้างต้น ผู้วิจัยจึงได้นำการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) มาใช้ในการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ผ่านเกณฑ์ และสามารถบรรลุเป้าหมายตามที่หลักสูตรกำหนด

### วัตถุประสงค์ของการวิจัย (Research Objective)

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### วิธีดำเนินการวิจัย (Research Methods)

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 2 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 80 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

2. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 40 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 ได้มาโดยวิธีการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) ซึ่งแต่ละห้องเรียน จัดนักเรียนแบบคละความสามารถ

### เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 21 แผนการจัดการเรียนรู้

2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ประกอบด้วย แบบทดสอบย่อยวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (ระหว่างเรียน) ทดสอบทั้งหมด 4 ครั้ง หลังจากจัดการเรียนรู้ในเรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ตามลำดับ แต่ละครั้งเป็นข้อคำถามแบบอัตนัย จำนวน 2 ข้อ 20 คะแนน นำมาแปลงคะแนนเป็น 15 คะแนน ใช้เวลาในการทดสอบ แบบทดสอบละ 40 นาที และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (หลังเรียน) เป็นข้อคำถามแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ 40 คะแนน ใช้เวลาในการทดสอบทั้งสิ้น 90 นาที ซึ่งแบบทดสอบผ่านการตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาจากผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 3 ท่าน โดยมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

### การวิเคราะห์ข้อมูล

1. วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีการทางสถิติ โดยนำคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย มาวิเคราะห์ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และวิเคราะห์คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการจัดการเรียนรู้ ด้วย One Sample t-Test เพื่อเปรียบเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70

2. วิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีการวิเคราะห์เนื้อหา (Content Analysis) จากแนวคิดของนักเรียนที่ตอบในแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

### ผลการวิจัย (Research Results)

ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัยเชิงปริมาณ และผลการวิจัยเชิงคุณภาพในด้านการสร้างภาพประกอบการแก้ปัญหา ด้านการเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา ด้านการดำเนินการแก้ปัญหา และด้านการสรุปคำตอบ มีรายละเอียดดังนี้

#### ส่วนที่ 1 ผลการวิจัยเชิงปริมาณ

การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง

ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของกลุ่มตัวอย่างหลังการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด CPA ซึ่งมีรายละเอียดดังตารางที่ 1

**ตารางที่ 1** คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ระหว่างเรียน และหลังเรียน

แบบทดสอบย่อย ครั้งที่ 1 (15 คะแนน)	แบบทดสอบย่อย ครั้งที่ 2 (15 คะแนน)	แบบทดสอบย่อย ครั้งที่ 3 (15 คะแนน)	แบบทดสอบย่อย ครั้งที่ 4 (15 คะแนน)	แบบทดสอบ หลังเรียน (40 คะแนน)
12.54	14.46	13.41	12.45	31.48

จากตารางที่ 1 พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในแต่ละแบบทดสอบย่อย มีค่าคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 12.54, 14.46, 13.41 และ 12.45 ตามลำดับ และในแบบทดสอบหลังเรียน มีค่าคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 31.48 รวมคะแนนทั้งหมดเท่ากับ 84.34

จากคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย รวมทั้งสิ้น 100 คะแนน นำมาเปรียบเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70 แสดงผลได้ดังตารางที่ 2

**ตารางที่ 2** ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนเปรียบเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 70

	n	คะแนนเต็ม	$\bar{x}$	S. D.	t	sig
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย	40	100	84.34	8.90	10.18	0.00*

\* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

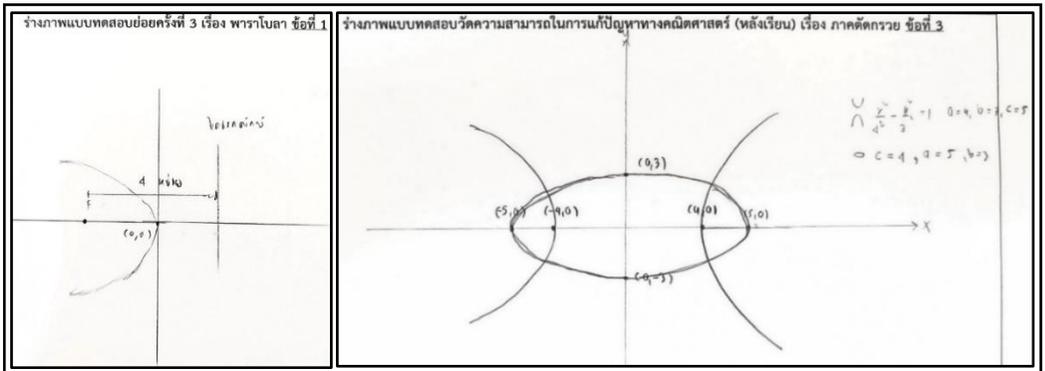
จากตารางที่ 2 พบว่า คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

## ส่วนที่ 2 ผลการวิจัยเชิงคุณภาพ

ผู้วิจัยวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยพิจารณา 4 ด้าน คือ ด้านการร่างภาพประกอบการแก้ปัญหา ด้านการเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา ด้านการดำเนินการแก้ปัญหา และด้านการสรุปคำตอบ ปรากฏผลดังต่อไปนี้

### 2.1 ด้านการร่างภาพประกอบการแก้ปัญหา

นักเรียนที่ได้คะแนนเต็มด้านการร่างภาพประกอบการแก้ปัญหา สามารถร่างภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ครบทุกองค์ประกอบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด ดังตัวอย่างในภาพที่ 1

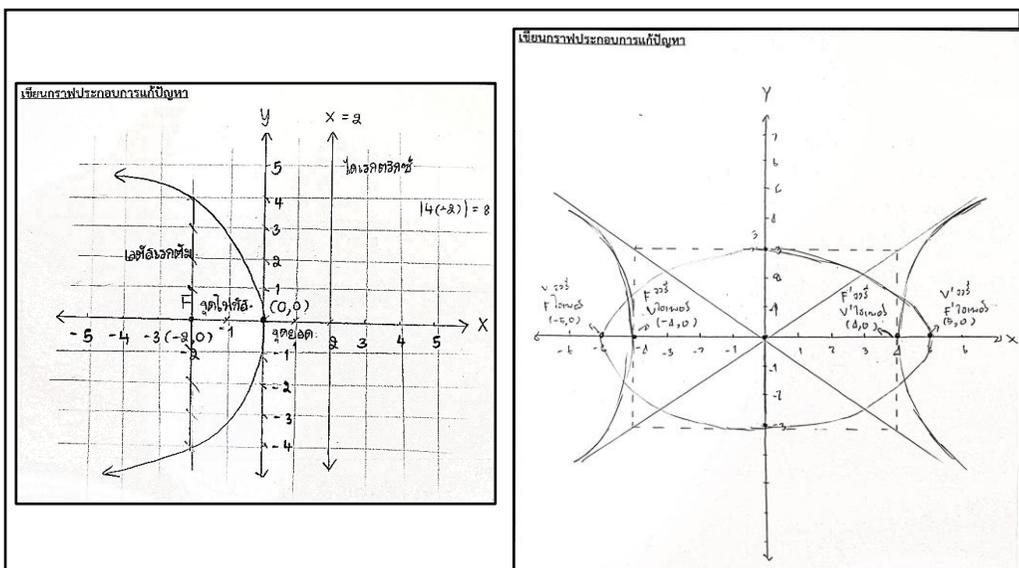


ภาพที่ 1 ตัวอย่างคำตอบนักเรียนที่ได้คะแนนเต็ม ด้านการร่างภาพประกอบการแก้ปัญหา

จากภาพที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถร่างภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ครบทุกองค์ประกอบที่โจทย์กำหนดให้ และมีความถูกต้องตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถเปลี่ยนปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ให้เป็นภาพร่างได้ภายในระยะเวลาที่กำหนด

### 2.2 ด้านการเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา

นักเรียนที่ได้คะแนนเต็มด้านการเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา สามารถเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา มีการแสดงสัญลักษณ์ และองค์ประกอบต่าง ๆ ของภาพอย่างถูกต้องชัดเจนและครบถ้วน ดังตัวอย่างในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 ตัวอย่างคำตอบนักเรียนที่ได้คะแนนเต็ม ด้านการเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา

จากภาพที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา โดยมีการแสดงสัญลักษณ์ และองค์ประกอบต่าง ๆ ของภาพอย่างถูกต้อง ชัดเจนและครบถ้วน แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถเปลี่ยนปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ให้เป็นกราฟที่มีความถูกต้อง มีรายละเอียดชัดเจนครบถ้วนตามที่โจทย์กำหนด สามารถนำไปประกอบการดำเนินการแก้ปัญหาได้

### 2.3 ด้านการดำเนินการแก้ปัญหา

นักเรียนที่ได้คะแนนเต็มด้านการดำเนินการแก้ปัญหา สามารถค้นหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่ถูกต้องได้ มีการแก้ปัญหายังเป็นขั้นตอนชัดเจน และถูกต้อง ดังตัวอย่างในภาพที่ 3

ดูเนื้องานแก้ปัญหา

จากสมการไฮเพอร์โบลา  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

จะได้ว่า ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0)$ ,  $a=4$ ,  $b=3$

ระกอบด้านที่มี  $c^2 = a^2 + b^2$   
 จะได้  $c^2 = 16 + 9$   
 $c^2 = 25$   
 $c = 5$

ระกอบด้านได้แก่ วงรีมี  $c = 4$ ,  $a = 5$

ระกอบด้านที่มี  $a^2 = b^2 + c^2$   
 $25 = b^2 + 16$   
 $b^2 = 9$   
 $b = 3$

ดังนั้นจะได้สมการวงรีคือ  $\frac{x^2}{(5)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1$   
 $\hookrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

ดำเนินการแก้ปัญหา

จากโจทย์จุดรีพัสหนึ่งจากเส้นตรงมีระยะทาง 4 หน่วย  
 จุดยอด  $(0,0)$  จะได้ว่าจุดรีพัส คือจุด  $(-2,0)$   
 เส้นตรงที่มีจุดรี  $x = -(-2) = 2$

จาก สมการพาราโบลา  $y^2 = 4px$   
 จะได้  $y^2 = 4(-2)x$   
 $\therefore y^2 = -8x$

ภาพที่ 3 ตัวอย่างคำตอบนักเรียนที่ได้คะแนนเต็ม ด้านการดำเนินการแก้ปัญหา

จากภาพที่ 3 พบว่า นักเรียนสามารถดำเนินการแก้ปัญหายังเป็นขั้นตอนชัดเจน และถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ที่มีลักษณะเป็นนามธรรมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยการเขียนกราฟ มาพิจารณา ประกอบกับการดำเนินการแก้ปัญหาด้วย ส่งผลให้นักเรียนสามารถค้นหาแนวทาง และดำเนินการแก้ปัญหาได้อย่างเป็นขั้นตอนชัดเจน และถูกต้อง

## 2.4 ด้านการสรุปคำตอบ

<p><b>สรุปคำตอบ</b></p> <p>พาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด โฟกัสบนแกน <math>x</math> ด้านลบ ห่างจาก จุดกำเนิด 4 หน่วย คือ <math>y^2 = -8x</math></p>
<p><b>สรุปคำตอบ</b> สมการวงรีที่มีโฟกัสบนแกน <math>x</math> คือ <math>\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1</math> เมื่อมีจุดยอดบน <math>x</math> แกน <math>x</math> หรือ <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math> เมื่อมีจุดยอดบน <math>y</math> แกน <math>y</math></p>

จากภาพที่ 4 พบว่า นักเรียนสามารถสรุปคำตอบ จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยมีการสรุปคำตอบของปัญหาได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจคำถามของโจทย์ปัญหาได้ และมีการหาคำตอบที่ถูกต้อง ส่งผลให้นักเรียนสามารถสรุปคำตอบของปัญหาได้อย่างถูกต้อง

## อภิปรายผลการวิจัย (Research Discussion)

จากผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากประเด็นในด้านต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. เนื่องจากผู้วิจัยได้จัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) ที่ให้นักเรียนได้เรียนรู้จากสื่อที่เป็นรูปธรรม และวัตถุจริงที่จับต้องได้ เพื่อให้นักเรียนเกิดความคุ้นเคยกับสิ่งที่นำมาจัดการเรียนรู้ เกิดการจดจำผ่านการสัมผัส หยิบจับ ได้เห็นถึงรูปร่าง รูปทรง ขนาดของวัตถุที่นำมาใช้จัดการเรียนรู้ และตำแหน่งของส่วนประกอบต่าง ๆ นำมาวิเคราะห์ สร้างภาพที่ได้จากวัตถุ และสื่อการเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรม นำไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ และสำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในแต่ละข้อ จะมีส่วนที่นักเรียนต้องเขียนกราฟประกอบการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ จึงมีการใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการเขียนกราฟอภิปรายถึงปัญหาในแต่ละข้อ หรือใช้ในการตรวจสอบความเข้าใจและความถูกต้องในการนิยาม และคำตอบของนักเรียน นำไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ สรินนา หมอนสุภาพ (2548) ที่ได้กล่าวถึงการแสดงแทนว่า การแสดงแทนมีความสำคัญต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มาก ซึ่งนอกจากผู้สอนจะารู้เกี่ยวกับความคิดรวบยอดของนักเรียน ว่ามีความเข้าใจหรือไม่ อย่างไรแล้ว การใช้ตัวแทนยังช่วยสนับสนุนการพัฒนาความคิดความเข้าใจในคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้นอีกด้วย และยังสอดคล้องกับ สุจินดา เอี่ยมโอภาส (2552) ที่ได้กล่าวว่า การแสดงแทน เป็นการแปลงเนื้อหาที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมหรือสร้างรูปแบบต่าง ๆ ขึ้นมา ช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้เข้าใจมากยิ่งขึ้น และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

2. เนื่องจากผู้วิจัยได้จัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) โดยมีการเชื่อมโยงในขั้น Pictorial กับขั้น Abstract ที่ให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมสำรวจสมการทาง

คณิตศาสตร์ในเรื่องภาคตัดกรวย ด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ที่มีการแสดงภาพที่ได้จากสมการ มีการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองผ่านการทดลอง เปลี่ยนค่าในสมการ และตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ อีกทั้งยังมีการสำรวจตรวจสอบด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ จากการทำโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องภาคตัดกรวย ทำให้นักเรียนเกิดกระบวนการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง และสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งสอดคล้องกับ ปรียา บุญยสุริ (2562) ที่ได้กล่าวว่า ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนได้สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง นักเรียนจะเกิดความสามารถในด้านต่าง ๆ รวมถึงความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สามารถวิเคราะห์ปัญหา หรือสถานการณ์อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง

3. ในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจ และสร้างองค์ความรู้ร่วมกันเป็นกลุ่ม มีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในเรื่องภาคตัดกรวย ด้วยกระบวนการ CPA และมีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันในชั้นเรียน โดยครูเป็นผู้ตั้งข้อคำถาม ข้อสังเกต สร้างสถานการณ์ปัญหา และให้คำแนะนำถึงแนวทางที่ถูกต้อง ส่งผลให้นักเรียนเกิดกระบวนการเรียนรู้เป็นกลุ่ม มีการอภิปรายถึงเนื้อหา นิยาม และส่วนประกอบของรูปในภาคตัดกรวย การแสดงแทนจากโจทย์ปัญหา ตลอดจนแนวทางในการแก้ปัญหานั้น โดยกระบวนการกลุ่มที่เหล่านี้นำมาส่งผลให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าการเรียนรู้ด้วยกระบวนการ CPA เพียงอย่างเดียว ซึ่งสอดคล้องกับ เกษสุตา บุรณพันธ์ (2561) ได้กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการเรียนรู้ร่วมกันจะทำให้นักเรียนได้คุ้นเคยกับงานหรือคำถามที่ท้าทาย ทั้งนี้กิจกรรมการเรียนรู้ร่วมกันมักจะเริ่มต้นด้วยปัญหา โดยนักเรียนต้องนำเสนอแนวคิดของตน ร่วมกับการรับฟังแนวคิดและวิธีการแก้ปัญหของผู้อื่น จึงส่งผลให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ดี

แม้ว่าเนื่องจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จะสามารถคิดเชิงนามธรรมในชั้น Abstract ได้แล้ว แต่จากการวิจัยพบว่า ในชั้น Concrete หรือ Pictorial ก็ยังคงมีความสำคัญ ไม่ว่าจะเป็นการเพิ่มแรงจูงใจในการเรียนรู้ของนักเรียน ให้นักเรียนได้เห็นถึงคุณค่า และประโยชน์ของคณิตศาสตร์ในชีวิตจริง ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายขึ้น และมีความคงทน จดจำได้นาน เป็นต้น ทั้งนี้ การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เป็นการจัดการเรียนรู้ที่มีความยืดหยุ่น มีการเชื่อมโยงซึ่งกันและกัน สามารถเกิดซ้ำ สลับกันไปมาได้ หรืออาจเกิดขึ้นพร้อมกัน ขึ้นอยู่กับนักเรียนแต่ละบุคคล เช่น เมื่อนักเรียนมีการเรียนรู้จากสื่อที่จับต้องได้ ประกอบกับการเขียนกราฟของครู นักเรียนจึงได้มีการนึกภาพจากสื่อที่เป็นรูปธรรมประกอบ นำมาร่างภาพ เขียนกราฟ และจดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ประกอบกับการแก้ปัญหาไปพร้อม ๆ กัน ซึ่งสอดคล้องกับ Hui et al. (2017) ที่ได้กล่าวว่า ในการเรียนการสอน จะมีการโต้ตอบกันระหว่างการแสดงแทนภายนอกและการแสดงแทนภายใน เพื่อให้เรียนสามารถนึกภาพได้ โดยลำดับการการโต้ตอบไม่ตายตัว และมีความยืดหยุ่นสูง อาจมีการเกิดขึ้นพร้อมกัน หรือเกิดซ้ำได้ ซึ่งการเกิดขึ้นและความสำเร็จของการโต้ตอบแต่ละครั้งนั้น

มีความหลากหลายและขึ้นอยู่กับความแตกต่างของแต่ละบุคคล ดังนั้น Concrete, Pictorial และ Abstract จึงสามารถเกิดขึ้นสลับกันไปมา หรือเกิดขึ้นพร้อม ๆ กันในชั้นเรียนได้

## ข้อเสนอแนะการวิจัย (Research Suggestions)

จากผลการวิจัย ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะ ดังนี้

### 1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) ครูควรมีการเชื่อมโยงเนื้อหาทางคณิตศาสตร์กับสื่อในชีวิตจริง หรือสื่อที่เป็นรูปธรรม ที่สามารถสัมผัส จับต้องได้ และให้นักเรียนได้ลองหยิบจับ หรือทำกิจกรรมด้วยตนเอง ซึ่งจะเกิดแรงจูงใจในการเรียน และเกิดประสิทธิภาพในการเรียนรู้เป็นอย่างมาก นักเรียนจะสามารถเชื่อมโยงสื่อที่เป็นวัตถุจริง ไปสู่เนื้อหาหรือแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้

1.2 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ควรให้นักเรียนได้แสดงออกถึงความคิด โดยการนำเสนอผลงานของนักเรียนที่ได้จากการทำกิจกรรม หรืออภิปรายร่วมกันถึงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความเชื่อมโยงกับการทำกิจกรรมนั้น เป็นการทบทวนบทเรียน และให้นักเรียนเกิดความเชื่อมโยงระหว่างสื่อที่เป็นรูปธรรม การใช้ภาพแทนสื่อที่เป็นรูปธรรมนั้น และสัญลักษณ์หรือเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม ควรให้นักเรียนเห็นถึงการเชื่อมโยงในแต่ละขั้นที่สามารถเกิดซ้ำสลับกันไปมาได้ หรืออาจเกิดขึ้นพร้อมกัน ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น และสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

### 2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 เนื่องจากการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) จะมีการใช้สื่อที่หลากหลาย ให้นักเรียนได้ลองสัมผัส และเรียนรู้จากสื่อที่เป็นรูปธรรมด้วยตนเอง มีการนิกภาพ ใช้ภาพประกอบ แทนสิ่งที่เป็นรูปธรรม ซึ่งสามารถสร้างความสนใจของนักเรียนได้เป็นอย่างดี ดังนั้น จึงควรมีการวิจัยการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การจัดการเรียนรู้ ที่สร้างความสนใจของนักเรียน ทำให้นักเรียนอยากเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น

2.2 เนื่องจากการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) นักเรียนจะได้เรียนรู้ผ่านสื่อที่เป็นรูปธรรม สามารถหยิบจับได้ และเรียนรู้ผ่านรูปภาพแทนสื่อที่เป็นรูปธรรมนั้น นักเรียนจะต้องนิกภาพประกอบการแก้ปัญหา และเขียนออกมาเป็นสัญลักษณ์เชิงนามธรรม ส่งผลให้นักเรียนสามารถอธิบายองค์ประกอบหรือรายละเอียดของปัญหาและเนื้อหาทางคณิตศาสตร์แต่ละข้อได้ชัดเจนมากขึ้นด้วย ดังนั้น จึงควรมีการวิจัย การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิด Concrete-Pictorial-Abstract (CPA) เพื่อพัฒนาตัวแปรอื่นทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง เช่น มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

## เอกสารอ้างอิง (References)

- เกษสุตา บุรณพันธ์ศักดิ์. (2561). การเรียนการสอนที่แนะนำให้รู้คิด การเรียนรู้ร่วมกัน และรูปแบบการแปลงของเลข สู่แนวทางการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาครูยุคใหม่. สืบค้น 16 กรกฎาคม 2565, จาก <https://shorturl.asia/VZBDdb>
- ปรียา บุญญสิริ. (2562). การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง. *วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร*. 10 (1) : 369-386.
- สรินนา หมอนสุภาพ. (2548). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแบบโยนีโสมนสิการโดยเน้นการใช้ตัวแทน (Representation) เรื่อง เศษส่วน. สารนิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต (สาขาการมัธยมศึกษา). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สุจินดา เอี่ยมโอภาส. (2552). ผลการใช้ชุดการเรียนรู้ “Learning Mathematics Through English” ที่เน้นทักษะการใช้ตัวแทน (representation) เรื่อง ความน่าจะเป็น ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. สารนิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต (สาขาการมัธยมศึกษา). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2565). สรุปผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินำขึ้นพื้นฐาน (O-NET) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2564. สืบค้น 16 กรกฎาคม 2565, จาก <https://www.niets.or.th/uploads/editor/files/O-NET/rapid%20report%20M6-2564.pdf>
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). *รายงานแนวทางการยกระดับผลทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินำขึ้นพื้นฐาน (O-NET)*. นนทบุรี : บริษัท 21 เซ็นจูรี่ จำกัด.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge : Harvard University Press.
- Hui, C. S., Hoe, L. N. and Lee, K. P. (2017). Teaching and learning with concrete-pictorial-abstract sequence: A proposed model. *The Mathematics Educator*. 17 (1) : 1-28.