

การคำนวณหาความเร็วและการกระจัดของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก ขึ้นกับเวลาที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์และไซน์

Calculation of displacement and velocity of particle perturbation by time-dependent external force of cosine and sine function

จิราวรรณ ทรัพย์ทิพย์¹ ปิยรัตน์ มุลศรี¹ และอาทิตย์ หู่เต็ม^{2*}

¹สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ศึกษา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

²สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์

¹Science Education, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

²Physics Division, Faculty of Science and Technology, Phetchabun Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: artithutem@pcru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกเป็นฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์ที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคมวลดังกล่าวผ่านการคำนวณหาความเร็ว และการกระจัดที่เป็นฟังก์ชันของเวลาใช้แคลคูลัสการอินทิเกรต ซึ่งเรามีการสร้างแรงภายนอกจำนวน 4 แรงที่มีลักษณะเป็นแบบฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์ ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง และแบบฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์ ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นสอง เพื่อดูลักษณะของความเร็ว และการกระจัดว่าอนุภาคมวล m ถูกบังคับเคลื่อนที่เป็นเส้นแบบขึ้นลงระหว่างค่าบวกและค่าลบในกรณีที่แรงภายนอกเป็นแบบฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์ ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง

คำสำคัญ : ความเร็วที่ขึ้นกับเวลา, การกระจัดที่ขึ้นกับเวลา, แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์

Abstract

The purpose of this research article study was to explore the movement of particle m the disturbance by time-dependent external force of cosine and sine function and we have taken Integration by parts in Mathematics and Newton's second law in physics to calculate the velocity and the displacement of particle the disturbance by time-dependent external force of cosine and sine function. The finding was as follow we can conclude that the velocity and the displacement of particle m the disturbance by time-dependent external force of cosine and sine function depend on exponent of 1 as a result particle is oscillation around value of positive and value of negative for the velocity particle.

Keywords : time-dependent displacement, time-dependent velocity, time-dependent external force of cosine and sine function

บทนำ

เมื่ออนุภาคมวล m เคลื่อนที่ในตัวกลางจะเกิดแรงต้านการเคลื่อนที่กระทำกับอนุภาคเนื่องจากตัวกลางนั้นเรียกแรงต้านดังกล่าวว่า แรงต้านทาน (resisting force) , แรงหน่วง (damping force) และเรียกตัวกลางนี้ว่า resisting , damping หรือ dissipative medium แรงต้านที่เกิดขึ้นโดยทั่วไปมักจะแปรผันตามความเร็วของอนุภาคมวล m ที่เคลื่อนที่

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณหาความเร็วของอนุภาคที่ถูกบังคับด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาโคไซน์ และไซน์

งานวิจัยเรื่องนี้ยอมให้แรงภายนอกเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กัเวลา และเป็นฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์ ($F(t)$) มารบกวนอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่ในระบบ เราสามารถเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันภายใต้แรงภายนอกดังนี้

$$F(t) = m \frac{dv}{dt},$$

หรือสามารถเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 เป็นสมการความเร็วที่ขึ้นอยู่กัแรงภายนอก ดังนี้

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt + v_0 \quad (1)$$

โดยที่ m คือมวลของอนุภาคมีหน่วย kg , v_0 คือความเร็วเริ่มต้นของอนุภาค ณ เวลาเท่ากับ 0 วินาที ดังนั้นเราจึงได้มีการสร้างออกแบบแรงภายนอกเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กัเวลา และเป็นฟังก์ชันโคไซน์ และไซน์ ดังนี้

$$F_1(t) = F_0 \cos(\sigma t), \quad F_2(t) = F_0 \sin(\sigma t), \quad F_3(t) = F_0 \cos^2(\sigma t), \quad F_4(t) = F_0 \sin^2(\sigma t)$$

เพื่อต้องการคำนวณหาความเร็วของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกดังกล่าว ว่ามีลักษณะการสั่นและการเคลื่อนที่ต่างกันตรงแอมพลิจูด และเฟสเริ่มต้นของระบบดังนี้ แทนแรง $F_1(t)$ ลงในสมการที่ (1) และใช้การอินทิเกรตจะได้อความเร็วของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกของ $F_1(t)$ ดังนี้

$$v_1(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t \cos(\sigma t) dt + v_0 = \frac{F_0}{m\sigma} \sin(\sigma t) \Big|_0^t + v_0$$

$$v_1(t) = \frac{F_0}{m\sigma} \sin(\sigma t) + v_0 \quad (2)$$

จากสมการที่ (2) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างความเร็ว และเวลาของแรงภายนอกของ $F_1(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย ต่อไปนำแรงภายนอกของ $F_2(t)$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$v_2(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t \sin(\sigma t) dt + v_0 = -\frac{F_0}{m\sigma} \cos(\sigma t) \Big|_0^t + v_0$$

$$v_2(t) = \frac{F_0}{m\sigma} (1 - \cos(\sigma t)) + v_0 \quad (3)$$

จากสมการที่ (3) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างความเร็ว และเวลาของแรงภายนอกของ $F_2(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย ต่อไปนำแรงภายนอกของ $F_3(t)$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$v_3(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t \cos^2(\sigma t) dt + v_0 = \frac{F_0}{2m} \left(\int_0^t 1 dt + \int_0^t \cos(2\sigma t) dt \right) + v_0$$

$$v_3(t) = \frac{F_0}{2m} \left(t + \frac{\sin(2\sigma t)}{2\sigma} \right) + v_0 \quad (4)$$

จากสมการที่ (4) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างความเร็ว และเวลาของแรงภายนอกของ $F_3(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย ต่อไปนำแรงภายนอกของ $F_4(t)$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$v_4(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t \sin^2(\sigma t) dt + v_0 = \frac{F_0}{2m} \left(\int_0^t 1 dt - \int_0^t \cos(2\sigma t) dt \right) + v_0$$

$$v_4(t) = \frac{F_0}{2m} \left(t - \frac{\sin(2\sigma t)}{2\sigma} \right) + v_0 \quad (5)$$

การคำนวณหาการกระจัดของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาโคไซน์ และไซน์ เราเปลี่ยนความเร็วของอนุภาคเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของการกระจัดเทียบเวลา ในสมการที่ (2) แล้วทำการอินทิเกรต จะได้การกระจัดของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกของ $F_1(t)$ ดังนี้

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{F_0}{m\sigma} \sin(\sigma t) + v_0$$

$$\int_{x_0}^x dx_1(t) = \frac{F_0}{m\sigma} \int_0^t \sin(\sigma t) dt + \int_0^t v_0 dt$$

$$x_1(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{m\sigma^2} (1 - \cos(\sigma t)) \quad (6)$$

จากสมการที่ (6) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างการกระจัด และเวลาของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกของ $F_1(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย ต่อไปนำความเร็วของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_2(t)$ มาอินทิเกรตเทียบกับเวลาจะได้การกระจัดของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกดังนี้

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{F_0}{m\sigma} (1 - \cos(\sigma t)) + v_0$$

$$\int_{x_0}^x dx_2(t) = \frac{F_0}{m\sigma} \int_0^t (1 - \cos(\sigma t)) dt + \int_0^t v_0 dt$$

$$x_2(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{m\sigma} \left(t - \frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} \right) \quad (7)$$

จากสมการที่ (7) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างการกระจัด และเวลาของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกของ $F_2(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย ต่อไปนำความเร็วของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_3(t)$ มาอินทิเกรตเทียบกับเวลาจะได้การกระจัดของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกดังนี้

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{F_0}{2m} \left(t + \frac{\sin(2\sigma t)}{2\sigma} \right) + v_0$$

$$\int_{x_0}^x dx_3(t) = \frac{F_0}{2m} \left(\int_0^t t dt + \int_0^t \frac{\sin(2\sigma t)}{2\sigma} dt \right) + \int_0^t v_0 dt$$

$$x_3(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(1 - \cos(2\sigma t))}{4\sigma^2} \right) \quad (8)$$

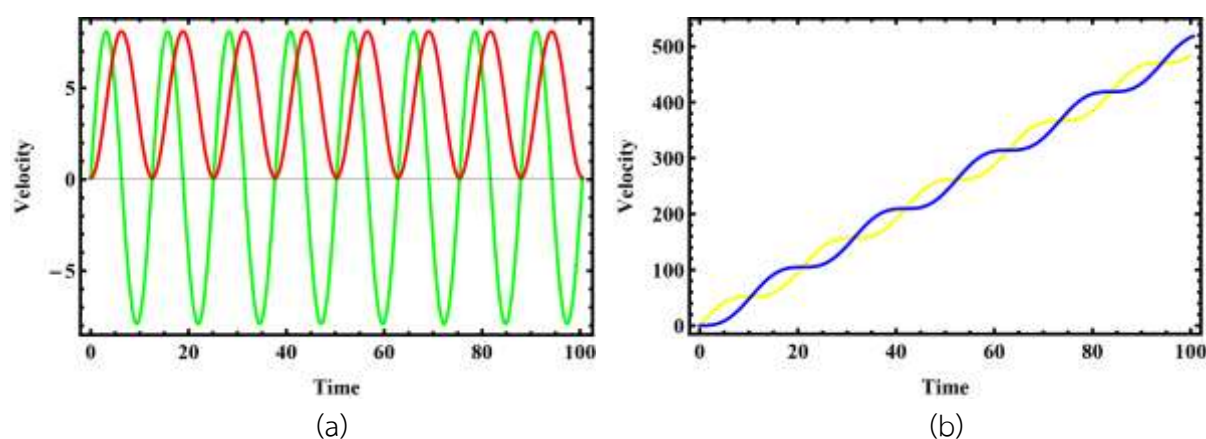
จากสมการที่ (8) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างการกระจัด และเวลาของอนุภาคที่ถูกขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอกของ $F_3(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย ต่อไปนำความเร็วของอนุภาคที่ถูกขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอก $F_4(t)$ มาอินทิเกรตเทียบกับเวลาจะได้รับการกระจัดของอนุภาคที่ถูกขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอกดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{dx_4(t)}{dt} &= \frac{F_0}{2m} \left(t - \frac{\sin(2\sigma t)}{2\sigma} \right) + v_0 \\ \int_{x_0}^x dx_4(t) &= \frac{F_0}{2m} \left(\int_0^t t \, dt - \int_0^t \frac{\sin(2\sigma t)}{2\sigma} \, dt \right) + \int_0^t v_0 \, dt \\ x_4(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(\cos(2\sigma t) - 1)}{4\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

จากสมการที่ (9) เราสามารถนำแสดงกราฟระหว่างการกระจัด และเวลาของอนุภาคที่ถูกขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอกของ $F_4(t)$ ในหัวข้อผลการวิจัย

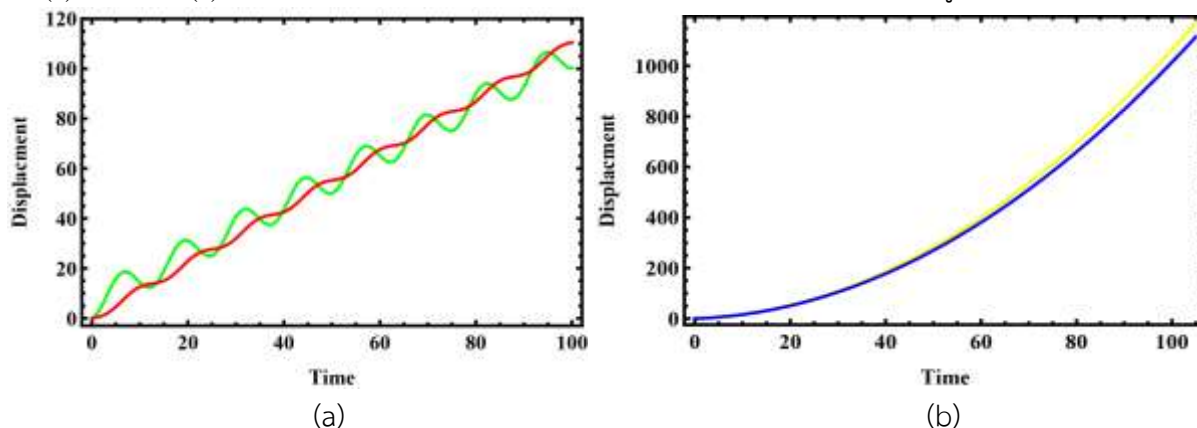
ผลการวิจัย

จากสมการที่ (2) และสมการที่ (3) เป็นความเร็วของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเป็น $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ ตามลำดับ สามารถแสดงกราฟระหว่างความเร็วและเวลาได้ดังรูปภาพที่ 1 (a) และจากสมการที่ (4) และสมการที่ (5) เป็นความเร็วของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็น $F_3(t)$ และ $F_4(t)$ ตามลำดับสามารถแสดงกราฟระหว่างความเร็วและเวลาได้ดังรูปภาพที่ 1 (b)



ภาพที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของอนุภาคมวล m กับเวลา (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ของอนุภาคที่ถูกขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอก $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ของอนุภาคที่ถูกขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอก $F_3(t)$ และ $F_4(t)$

จากสมการที่ (6) และสมการที่ (7) เป็นการกระจัดของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็น $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ ตามลำดับ สามารถแสดงกราฟระหว่างการกระจัด และเวลาได้ดังรูปภาพที่ 2 (a) และจากสมการที่ (8) และสมการที่ (9) เป็นการกระจัดของอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้แรงภายนอกที่เป็น $F_3(t)$ และ $F_4(t)$ ตามลำดับ สามารถแสดงกราฟระหว่างการกระจัด และเวลาได้ดังรูปภาพที่ 2 (b)



ภาพที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดของอนุภาคมวล m กับเวลา (a) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดกับเวลา ของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ (b) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดกับเวลา ของอนุภาคที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_3(t)$ และ $F_4(t)$

อภิปรายผล

จากภาพที่ 1(a) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว และเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวคือความเร็วของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบสั่นขึ้นลงระหว่างค่าที่เป็นบวกของความเร็ว และค่าที่เป็นลบของความเร็วโดยมีเฟสเริ่มต้นที่ 0 rad ต่อมาเส้นกราฟสีแดงคือกราฟแสดงความเร็วและเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_2(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบสั่นขึ้นลงเฉพาะค่าที่เป็นบวกของความเร็วเท่านั้น มีการเปรียบเทียบระหว่างความเร็ว $v_1(t)$ กับความเร็ว $v_2(t)$ มีลักษณะของเฟสเริ่มต้นที่ต่างกันโดย $v_2(t)$ ที่มีการรบกวนจากแรงภายนอก $F_2(t)$ จะมีเฟสนำ $v_1(t)$ เพียงเล็กน้อย และความกว้างของลูกคลื่นของ $v_2(t)$ จะมีค่ามากกว่า $v_1(t)$ ต่อมาจากภาพที่ 1 (b) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว และเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_3(t)$ และ $F_4(t)$ ซึ่งเส้นกราฟสีเหลืองคือความเร็ว $v_3(t)$ ของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_3(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของความเร็วของอนุภาคมวล m เป็นแบบการสั่นขึ้นลงแต่มีลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีการสั่นที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้าคือความเร็ว $v_4(t)$ ของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_4(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของความเร็วของอนุภาคมวล m เป็นแบบการสั่นขึ้นลงแต่มีลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีการสั่นที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกับกราฟเส้นสีเหลือง มีการเปรียบเทียบระหว่างความเร็ว $v_3(t)$ กับความเร็ว $v_4(t)$

เฟสเริ่มต้นของความเร็วทั้งสองจะมีลักษณะตรงกันข้ามกัน ช่วงความถี่และแอมพลิจูดของความเร็วของ $v_3(t)$ และ $v_4(t)$ มีลักษณะเหมือนกัน ต่อมาจากภาพที่ 2 (a) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด และเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_1(t)$ และ $F_2(t)$ ซึ่งเส้นกราฟสีเขียวคือการกระจัด $x_1(t)$ ของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_1(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบสั่นขึ้นลงระหว่างค่าที่เป็นบวกของความเร็วเป็นกราฟเส้นตรงที่มีการสั่นขึ้นลง ต่อไปเป็นกราฟเส้นสีแดงการกระจัด $x_2(t)$ ของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $F_2(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบสั่นขึ้นลงระหว่างค่าที่เป็นบวกของความเร็วเป็นกราฟเส้นตรงที่มีการสั่นขึ้นลงเหมือนกับ $x_1(t)$ แต่มีความแตกต่างเพียงเล็กน้อยช่วงของความยาวคลื่น และแอมพลิจูดของการสั่น ต่อมาจากภาพที่ 2 (b) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด และเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_3(t)$ และ $F_4(t)$ ซึ่งเส้นกราฟสีเหลืองคือกราฟการกระจัด $x_3(t)$ และเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_3(t)$ ต่อมาเส้นกราฟสีฟ้าคือกราฟการกระจัด $x_4(t)$ และเวลาของอนุภาคมวล m ที่ถูกรบกวนด้วยแรงภายนอก $F_4(t)$ มีลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคเหมือนกัน ทั้ง $x_3(t)$ และ $x_4(t)$ เป็นแบบกราฟพาราโบลา

สรุปผลการวิจัย

ถ้าเราใส่แรงภายนอกที่มีลักษณะเป็นฟังก์ชันโคไซน์ หรือไซน์ ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งจะทำให้ความเร็วของอนุภาคมวล m มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นขึ้นลงที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าบวก หรือลบ แต่ถ้าเราเลือกใส่แรงภายนอกที่มีลักษณะเป็นฟังก์ชันโคไซน์ หรือไซน์ ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นสอง กราฟของความเร็วของอนุภาคมวล m มีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นขึ้นลงเส้นตรง

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ที่ให้การสนับสนุนด้านสถานที่ และเวลาในการทำงานวิจัย จนกระทั่งงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- A. Arya, Introduction to Classical Mechanics, 1990, Prentice-Hall, pp.23-38
- D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 1999, Prentice-Hall, pp.58-70
- P.Lorrain and D. R. Corson, Electromagnetic Fields and Wave, 1962, W. H. Freeman and Company, pp.40-72
- C. A. Brau, Modern problems in classical Electrodynamics, 2004 pp.2-24
- K. Nontasan, P. Mayanan, T. Tippanon and S. Hutem, Evaluation of velocity and acceleration for electron bound electricity time dependent type exponential sine, Journal of Science & Technology Phetchabun Rajabhat University Vol. 3 No. 2, 2018

P. Chinpanchana, T. Sangkateeb, M. Wongsrirungreuang, M. Uthamka and S. Hutem,
Evaluation of displacement and velocity of charge motion in electricity, Journal of
Science & Technology Phetchabun Rajabhat University Vol. 3 No. 1, 2018