

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบ $24^x + 4^y = z^2$ และ $35^x + 4^y = z^2$
The solution of the diophantine equation forms $24^x + 4^y = z^2$
and $35^x + 4^y = z^2$

พัชรา ม่วงการ¹, สุธิพงษ์ คำเที่ยง¹ และ ชลธิศ เสือนุ่ม^{*1}

Patchara Muangkarn¹, Sutipong Khamtheang¹ and Cholatis Suanoom^{*,1}

¹โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

¹Mathematics program Faculty of Science and Technology Kamphaeng Phet Rajabhat University

Corresponding author E-mail: cholatis_s@kpru.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราได้หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ของสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 4^y = z^2$ และ $35^x + 4^y = z^2$ ยิ่งไปกว่านั้นเราได้พิสูจน์สมการไดโอแฟนไทน์ โดยการสร้างเครื่องมือทางคณิตศาสตร์

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก $24^x + 4^y = z^2$ และ $35^x + 4^y = z^2$

Abstract

In this paper, we find non-negative integer solutions of the Diophantine equation $24^x + 4^y = z^2$ and $35^x + 4^y = z^2$. Moreover, we proved the Diophantine equation. by creating mathematical tools.

Keywords : Diophantine equation, Non-negative integer, Solutions $24^x + 4^y = z^2$ and $35^x + 4^y = z^2$

บทนำ

ไดโอแฟนทัสแห่งอะเล็กซานเดรีย (Diophantus of Alexandria, ค.ศ. 200-284) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกได้รับการยกย่องว่าเป็น “บิดาของพีชคณิต” ผลงานเรียนที่มีชื่อเสียงมากคือหนังสือเลขคณิต (Arithmetica) ได้ตีพิมพ์หนังสือจำนวน 13 เล่ม แต่มีเหลือไว้ให้ศึกษาเพียง 6 เล่ม ประกอบด้วยการหาผลเฉลยประมาณ 150 ปัญหาปัญหาของไดโอแฟนทัส หลายปัญหากลายเป็นจุดเริ่มต้นของทฤษฎีจำนวน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ไดโอแฟนทัสสนใจผลเฉลยของสมการพีชคณิตที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าสองตัวแปรหรือสามตัวแปรได้ โดยมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม ในปัจจุบันเมื่อกล่าวถึงสมการของไดโอแฟนทัสจะหมายถึงว่าสนใจผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้นและเรียกสมการเหล่านี้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) เพื่อให้เป็นเกียรติแก่ไดโอแฟนทัส เช่นสมการไดโอแฟนไทน์คือสมการสามจำนวนของพีทาโกรัส

จากการศึกษาบทความมีผู้วิจัยจำนวนมากสนใจศึกษาเกี่ยวกับสมการสมการไดโอแฟนไทน์ อ้างอิง [1-12] ดังสมการต่อไปนี้ เช่น Acu [1] รูปแบบ $2^x + 5^y = z^2$, Sandor [5] $3^x + 3^y = 6^2$, Sandor [6] $4^x + 18^y = 22^2$, Suvarnamani [9] $2^x + p^y = z^2$, Suvarnamani, Singta และ Chontchaisthit [11] สมการ $4^x + 7^y = z^2$ และ $4^x + 11^y = z^2$, sammsa [12] $14^x + 4^y = z^2$ ซึ่งค้นพบตรงกันว่าผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์สองสมการ ไม่มีผลเฉลยในเซตจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ยิ่งไปกว่านั้นยังมีผู้เขียนอีกมากมายที่สนใจสมการไดโอแฟนไทน์ ซึ่งจะเห็นได้จากอ้างอิง [1]-[12]

และในปี ค.ศ.2004 Mihăilescu [10] ได้แนะนำทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ ดังต่อไปนี้ ซึ่งจะนี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาวิจัยต่อไป

นิยาม 1.1 สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantion equation) คือ สมการใดๆ ที่มีตัวแปรหนึ่งตัวหรือมากกว่าหนึ่งตัวและผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

นิยาม 1.2 สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น (Linear Diophantion equation) คือ สมการพหุนาม ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม โดยมากสมการไดโอแฟนไทน์จะอยู่มีตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป

ทฤษฎีบท 1.1 สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ โดยที่ a, b, x, y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ในบทความนี้เราได้ใช้แนวคิดของ เกียรติศักดิ์ กุมาพันธ์ [12] มาศึกษาต่อยอดในงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 4^y = z^2$ และ $35^x + 4^y = z^2$

วิธีการดำเนินการวิจัยและผลลัพธ์

ก่อนที่จะเรานำเสนอผลลัพธ์หลัก เราจะกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทตั้งที่ 3.1 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ ที่ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มลบ

พิสูจน์ กำหนดให้ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ โดยที่ $y, z \in I^+ \cup \{0\}$

พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $y = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad z^2 &= 1 + 4^0 = 1 + 1 = 2 \\ z &= \sqrt{2} \notin I^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $y = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad z^2 &= 1 + 4^1 = 1 + 4 = 5 \\ z &= \sqrt{5} \notin I^+ \cup \{0\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $y > 1$

จะได้

$$4^y + 1 = z^2$$

$$1 = z^2 - 4^y = z^2 - 2^{2y}$$

จากทฤษฎีบท 1.1 จะได้ $z = 3, 2y = 3$

ฉะนั้น $y = \frac{3}{2} \notin \mathbb{I}^+ \cup \{0\}$ จากทั้ง 3 กรณีสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทตั้งที่ 3.2 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 1 = z^2$ ที่ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, z) = (1, 5)$

พิสูจน์ กำหนดให้ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $24^x + 1 = 25 = 5^2$

ดังนั้น $(1, 5)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $24^x + 1 = z^2$

ต่อไปจะแสดงว่า $24^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

ให้สมการ $24^x + 1 = z^2$ โดยที่ $x, z \in \mathbb{I}^+ \cup \{0\}$ พิจารณาได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้

$$z^2 = 24^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \sqrt{2} \notin \mathbb{I}^+ \cup \{0\}$$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $x = 1$

จะได้

$$z^2 = 24^1 + 1 = 25$$

$$z = 5$$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $x > 1$

จะได้

$$24^x + 1 = z^2$$

$$z^2 - 24^x = 1$$

ได้ว่า $z^2 - 24^x = 1$ ไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 1.1

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, z) = (1, 5)$

ในลำดับต่อไปเราจะนำเสนอทฤษฎีบท 3.3 เกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 4^y = z^2$

ทฤษฎีบท 3.3 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 4^y = z^2$ ที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 5)$

พิสูจน์ ให้สมการ $24^x + 4^y = z^2$ โดยที่ $x, y, z \in \mathbb{I}^+ \cup \{0\}$

พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้

$$1 + 4^y = 24^0 + 4^y = z^2$$

จากบทตั้งที่ 3.1 ทำให้สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มลบของสมการ

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $x > 1, y > 1$

จากสมการ $24^x + 4^y = z^2$

เราจะได้ $24^x = z^2 - 4 = z^2 - 2^{2y} = (z - 2^y)(z + 2^y)$

ให้ $x = a + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ $24^x = 24^{a+b} = 24^a \cdot 24^b = (z - 2^y)(z + 2^y)$ (1)

พิจารณา a กับ b ได้ 2 กรณี คือ $a = b$ และ $a \neq b$ โดยที่ $a, b > 0$

ถ้า $a = b$ จากสมการ (1) ทำให้ได้ว่า

$$24^a \cdot 24^b = 24^a \cdot 24^a = 24^{2a} = (1)(24^{2a}) = (z - 2^y)(z + 2^y)$$

เนื่องจาก $z - 2^y < z + 2^y$ และ $1 < 24^{2a}; a \in I^+$ จึงได้ว่า

$$1 = (z - 2^y) \quad (2)$$

$$24^{2a} = (z + 2^y) \quad (3)$$

นำสมการ (3)-(2)

$$24^{2a} - 1 = (z + 2^y) - (z - 2^y) = 2^{y+1}$$

$$24^{2a} - 2^{y+1} = 1$$

ทำให้ได้ว่า $24^{2a} - 2^{y+1} = 1$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 1.1

ถ้า $a \neq b$ และ $|a - b|$ มีค่าน้อยที่สุด

นั่นคือ $a < b$ หรือ $a > b$

ซึ่งในที่นี้พิจารณาเพียงกรณีเดียวคือ $a < b$

ทั้งนี้เนื่องจากในกรณี $a > b$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี $a < b$

พิจารณากรณี $a < b$

จากสมการ (1) $24^a \cdot 24^b = (z + 2^y)(z - 2^y)$

เนื่องจาก $z - 2^y < z + 2^y$ และ $24^a < 24^b; a, b \in I^+$

ทำให้ $24^a = z - 2^y$ (4)

$$24^b = z + 2^y \quad (5)$$

นำ (5) - (4)

$$24^a(24^{b-a} - 1) = 24^b - 24^a = (z + 2^y) - (z - 2^y) = 2^{y+1} = (1)2^{y+1}$$

ดังนั้น $24^a = 1$ และ $24^{b-a} - 1 = 2^{y+1}$

นั่นคือ $a = 0$

และได้ว่า $2^{y+1} = 24^{b-a} - 1 = 24^b - 1$

ทำให้ได้ $24^b - 2^{y+1} = 1$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 1.1

ดังนั้น กรณีที่ $x > 1, y > 1$ ได้ว่า $24^x + 4^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $y = 0$

จะได้ว่า $24^x + 4^0 = 24^x + 1 = z^2$

จากบทตั้งที่ 3.2 ได้ว่า $x = 1$ และ $z = 5$ เป็นผลเฉลย

ทำให้ได้ว่าสมการ $24^x + 4^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

คือ $(x, y, z) = (1, 0, 5)$

บทตั้งที่ 3.4 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ ที่ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มลบ

พิสูจน์ กำหนดให้ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ โดยที่ $y, z \in I^+ \cup \{0\}$

พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $y = 0$

จะได้
$$z^2 = 1 + 4^0 = 1 + 1 = 2$$
$$z = \sqrt{2} \notin I^+ \cup \{0\}$$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $y = 1$

จะได้
$$z^2 = 1 + 4^1 = 1 + 4 = 5$$
$$z = \sqrt{5} \notin I^+ \cup \{0\}$$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $y > 1$

จะได้
$$4^y + 1 = z^2$$
$$1 = z^2 - 4^y = z^2 - 2^{2y}$$

จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $z = 3, 2y = 3$

ฉะนั้น $y = \frac{3}{2} \notin I^+ \cup \{0\}$ จากทั้ง 3 กรณีสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $1 + 4^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทตั้งที่ 3.5 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $35^x + 1 = z^2$ ที่ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, z) = (1, 6)$

พิสูจน์ กำหนดให้ x, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เนื่องจาก $35^x + 1 = 36 = 6^2$

ดังนั้น $(1, 6)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $35^x + 1 = z^2$

ต่อไปจะแสดงว่า $35^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

ให้สมการ $35^x + 1 = z^2$ โดยที่ $x, z \in I^+ \cup \{0\}$

พิจารณาได้ 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้
$$z^2 = 35^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$z = \sqrt{2} \notin I^+ \cup \{0\}$$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $x = 1$

จะได้
$$z^2 = 35^1 + 1 = 36$$

$$z = 6$$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $x > 1$

จะได้
$$35^x + 1 = z^2$$

$$z^2 - 35^x = 1$$

ได้ว่า $z^2 - 35^x = 1$ ไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 1.1

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $35^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, z) = (1, 6)$

ในลำดับต่อไปเราจะนำเสนอทฤษฎีบท 3.6 เกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ $35^x + 4^y = z^2$

ทฤษฎีบท 3.6 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $35^x + 4^y = z^2$ ที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 6)$

พิสูจน์ ให้สมการ $35^x + 4^y = z^2$ โดยที่ $x, y, z \in I^+ \cup \{0\}$

พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $x = 0$

จะได้
$$1 + 4^y = 35^0 + 4^y = z^2$$

จากบทตั้งที่ 3.4 ทำให้สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มลบของสมการ

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $x > 1, y > 1$

จากสมการ $35^x + 4^y = z^2$

เราจะได้
$$35^x = z^2 - 4 = z^2 - 2^{2y} = (z - 2^y)(z + 2^y)$$

ให้ $x = a + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จะได้ } 35^x = 35^{a+b} = 35^a \cdot 35^b = (z - 2^y)(z + 2^y) \quad (6)$$

พิจารณา a กับ b ได้ 2 กรณี คือ $a = b$ และ $a \neq b$ โดยที่ $a, b > 0$

ถ้า $a = b$ จากสมการ (6) ทำให้ได้ว่า

$$35^a \cdot 35^b = 35^a \cdot 35^a = 35^{2a} = (1)(35^{2a}) = (z - 2^y)(z + 2^y)$$

เนื่องจาก $z - 2^y < z + 2^y$ และ $1 < 35^{2a}$; $a \in I^+$ จึงได้ว่า

$$1 = (z - 2^y) \quad (7)$$

$$35^{2a} = (z + 2^y) \quad (8)$$

$$\text{นำสมการที่ (8)-(7)} \quad 35^{2a} - 1 = (z + 2^y) - (z - 2^y) = 2^{y+1}$$

$$35^{2a} - 2^{y+1} = 1$$

ทำให้ได้ว่า $35^{2a} - 2^{y+1} = 1$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 1.1

ถ้า $a \neq b$ และ $|a - b|$ มีค่าน้อยที่สุด

นั่นคือ $a < b$ หรือ $a > b$

ซึ่งในที่นี้พิจารณาเพียงกรณีเดียวคือ $a < b$

ทั้งนี้เนื่องจากในกรณี $a > b$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี $a < b$

พิจารณากรณี $a < b$

$$\text{จากสมการ (6)} \quad 35^a \cdot 35^b = (z + 2^y)(z - 2^y)$$

เนื่องจาก $z - 2^y < z + 2^y$ และ $35^a < 35^b$; $a, b \in I^+$

$$\text{ทำให้} \quad 35^a = z - 2^y \quad (9)$$

$$35^b = z + 2^y \quad (10)$$

$$\text{นำสมการที่ (10) - (9)}$$

$$35^a(35^{b-a} - 1) = 35^b - 35^a = (z + 2^y) - (z - 2^y) = 2^{y+1} = (1)2^{y+1}$$

$$\text{ดังนั้น } 35^a = 1 \text{ และ } 35^{b-a} - 1 = 2^{y+1}$$

นั่นคือ $a = 0$

$$\text{และได้ว่า } 2^{y+1} = 35^{b-a} - 1 = 35^b - 1$$

ทำให้ได้ $35^b - 2^{y+1} = 1$ ซึ่งไม่สอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 1.1

ดังนั้น กรณีที่ $x > 1, y > 1$ ได้ว่า $35^x + 4^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $y = 0$

$$\text{จะได้ว่า } 35^x + 4^0 = 35^x + 1 = z^2$$

จากบทตั้งที่ 3.5 ได้ว่า $x = 1$ และ $z = 5$ เป็นผลเฉลย

ทำให้ได้ว่าสมการ $35^x + 4^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

$$\text{คือ } (x, y, z) = (1, 0, 6)$$

สรุปผลและอภิปรายผล

ในการศึกษาต่อยอดคณะผู้วิจัยขอเสนอสมการที่น่าสนใจดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 4^y = z^2$ ที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 5)$

ทฤษฎีบท 2 จากสมการไดโอแฟนไทน์ $35^x + 4^y = z^2$ ที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 6)$

ในการศึกษาต่อยอดคณะผู้วิจัยขอเสนอสมการที่น่าสนใจดังต่อไปนี้ $n^x + 4^y = m^2$ โดยที่ m, n, x, y เป็นจำนวนนับ และ $m^2 - 1 = n$

จากสมการไดโอแฟนไทน์ $24^x + 4^y = z^2$ ที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 5)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $35^x + 4^y = z^2$ ที่ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1, 0, 6)$

กิตติกรรมประกาศ

วิจัยฉบับนี้สำเร็จรูกลงได้ด้วยความช่วยเหลือจาก อาจารย์ที่ปรึกษาวิจัยท่าน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พัทธรา ม่วงการ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชลธิศ เสือนุ่ม อาจารย์ประจำรายวิชาโครงงานคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่ได้ให้คำปรึกษาและข้อคิดเห็นต่าง ๆ ในการวิจัยมาโดยตลอด รวมทั้งช่วยแก้ไขข้อบกพร่องจนวิจัยฉบับนี้สำเร็จลงได้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ณ โอกาสนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากการศึกษาวิจัยนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณบิดามารดาและอาจารย์ทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนวิชาความรู้ และให้ความเมตตาแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด เป็นกำลังใจสำคัญที่ทำให้การวิจัยฉบับนี้สำเร็จรูกลงได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

- [1] Acu, D., 2007. On a Diophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$, *General Math*, 15(4), 145-148.
- [2] David, M. B., 2007. Elementary Number Theory, 6th ed., McGraw-Hill, Singapore
- [3] Kenneth, H. R., 2000. Elementary Number Theory and its Application, 4th ed., Addison Wesley Longman, Inc.
- [4] Mordell, L. J. 1969. Diophantine Equations. Academic Press, New York.
- [5] Sandor, J. 2002. On a diophantine equation $3^x + 3^y = 6^2$, Geometric theorems, Diophantine equations and arithmetic functions. *American Research Press Rehobot*, 4, 89-90.
- [6] Sandor, J. 2002. On a Diophantine equation $4^x + 18^y = 22^2$, Geometric theorems, Diophantine equations and arithmetic functions, *American Research Press Rehobot* 4, 91-92.
- [7] Sierpinski, W. 1964. Elementary Theory of Numbers. Warszawa
- [8] Silverman, J. H. 2001. A Friendly Introduction to Number Theory, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., New Jersey,
- [9] Suvarnamani, A. 2011. Solution of the Diophantine equation $2^x + p^y = z^2$. *Int. J. of Mathematical Sciences and Applications*, 1(3), September
- [10] Mihailescu, P. 2004. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture, *J. Reine Angew. Math.* 27, 167-195
- [11] Suvarnamani, A. & Singtaand, A. & Chotchaisthit, A. 2011. On two Diophantine equations $4^x + 7^y = z^2$ and $4^x + 11^y = z^2$, *Science and Technology RMUTT Journal*. 1(1)
- [12] sammsa, A. 2020. Diophantine equations $14^x + 4^y = z^2$. *Science and Technology Rajabhat Mathematics Journal*, 67 – 71.