

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$

The solutions of the Diophantine equations

$$11^x - 3^y = z^2 \text{ and } 14^x - 3^y = z^2$$

สุธน ตาดิ

Suton Tadee

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยใช้ความรู้พื้นฐานของสมภาคและทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู ผลการวิจัย พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $14^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 3, 13)$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์ สมภาค ทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Abstract

In this paper, we study all solutions of the Diophantine equations $11^x - 3^y = z^2$ and $14^x - 3^y = z^2$, where x, y and z are non-negative integers. By using the elementary concepts of congruence and Mihăilescu's Theorem, we show that the Diophantine equation $11^x - 3^y = z^2$ has the unique non-negative integer solution (x, y, z) , which is $(0, 0, 0)$. The Diophantine equation $14^x - 3^y = z^2$ has exactly two non-negative integer solutions (x, y, z) , which are $(0, 0, 0)$ and $(2, 3, 13)$.

Keywords : Diophantine equation, Congruence, Mihăilescu's Theorem, Non-negative integer solution

บทนำ

ในปี ค.ศ. 2019 Thongnak et al. (2019) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $2^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สามผลเฉลย ดังนี้ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ และ $(2, 1, 1)$ และในปีถัดมา Burshtein (2020) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวกเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (2, 2, 12)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $19^x - 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มบวก ในปี ค.ศ. 2021-2022 Thongnak et al. (2021, 2022) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x - 5^y = z^2$ และ $7^x - 2^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ในปี ค.ศ. 2022 Rao (2022)

ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $23^x - 19^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(1, 1, 2)$

ในปี ค.ศ. 2023 Tadee (2023) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $9^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ กล่าวคือ $(x, y, z) \in \{(r, 2r, 0)\}$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและสมการไดโอแฟนไทน์ $13^x - 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ และ Kaewong et al. (2023) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $29^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ในปีเดียวกันนี้ Gope (2023) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $27^x - 11^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(1, 1, 4)$ และนอกจากนี้ Chuayjan et al. (2023) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 1, 2)$

และเมื่อเร็วๆ นี้ Siraworakun and Tadee (2024) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $25^x - 7^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 2, 24)$ และ Thongnak et al. (2024) ได้แสดงว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) สามผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 2)$ และ $(2, 2, 4)$

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้นทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ความรู้พื้นฐาน

ในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบนั้นจะใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมภาค (congruence) และทฤษฎีบทของมิไฮเลสคู (Mihăilescu's Theorem) ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทดังกล่าว ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 (Burton, 2010, p. 63) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่าสองจำนวนเต็ม a และ b สมภาค หรือคอนกรูเอนซ์ มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ เมื่อ n หาร $a - b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 1 (Burton, 2010, p. 65) ให้ $n > 1$ และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

- 1) $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
- 3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
- 4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ และ $ab \equiv cd \pmod{n}$
- 5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
- 6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 2 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$

พิสูจน์ เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจะมี $r \in \{0, 1, 2\}$ ซึ่งทำให้ $a \equiv r \pmod{3}$

กรณีที่ 1: $r = 0$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{3}$

กรณีที่ 2: $r = 1$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{3}$

กรณีที่ 3: $r = 2$ จะได้ว่า $a^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$

ดังนั้นจากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$

ทฤษฎีบท 3 ให้ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้ว่า $3^y + 1 \equiv 2, 4 \pmod{8}$

พิสูจน์

กรณีที่ 1: y เป็นจำนวนคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ h ซึ่งทำให้ $y = 2h$ จะได้ว่า

$$3^y + 1 \equiv 3^{2h} + 1 \equiv 1^h + 1 \equiv 2 \pmod{8}$$

กรณีที่ 2: y เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ l ซึ่งทำให้ $y = 2l + 1$ จะได้ว่า

$$3^y + 1 \equiv 3^{2l+1} + 1 \equiv 3 \cdot 1^l + 1 \equiv 4 \pmod{8}$$

ดังนั้นจากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า $3^y + 1 \equiv 2, 4 \pmod{8}$

นอกจากนี้จะนำเสนออีกหนึ่งทฤษฎีที่มีบทบาทสำคัญในการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ กล่าวคือ **ทฤษฎีบท 4** (Mihăilescu's Theorem) (Mihăilescu, 2004) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$, เมื่อ a, b, x และ y เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $\min\{a, b, x, y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$

ผลการวิจัย

ในการศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ และ $14^x - 3^y = z^2$ นั้น จะเริ่มจากการพิสูจน์สองทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวคือ ทฤษฎีบท 5 และ 6 เพื่อที่จะนำสองทฤษฎีบทนี้ไปใช้อ้างในการพิสูจน์หาผลเฉลยของสองสมการดังกล่าว

ทฤษฎีบท 5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 1$ จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 1 = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, z) คือ $(0, 0)$ และ $(1, \sqrt{n-1})$ เมื่อ $\sqrt{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ ให้ x และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $n^x - 1 = z^2$ หรือ $n^x - z^2 = 1$

กรณีที่ 1: $x = 0$ จะได้ว่า $z^2 = 0$ ดังนั้น $z = 0$ นั่นคือ $(x, z) = (0, 0)$

กรณีที่ 2: $x = 1$ จะได้ว่า $z^2 = n - 1$ ดังนั้น $z = \sqrt{n-1}$ นั่นคือ $(x, z) = (1, \sqrt{n-1})$

เมื่อ $\sqrt{n-1}$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3: $x > 1$ และจาก $n > 1$ จะได้ว่า $z^2 = n^x - 1 > 1$ ดังนั้น $z > 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 4

ทฤษฎีบท 6 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n > 1$ และ $\gcd(n, 3) = 1$ และให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $n^x - 3^y = z^2$ จะได้ว่า ถ้า $y > 0$ และ $n \equiv 2 \pmod{3}$ แล้วจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ และ $2 \cdot n^k = 3^y + 1$

พิสูจน์ ให้ $y > 0$ และ $n \equiv 2 \pmod{3}$ จะได้ว่า $3^y \equiv 0 \pmod{3}$ และ $n^x \equiv 2^x \equiv (-1)^x \pmod{3}$ ตามลำดับ และจาก $z^2 = n^x - 3^y$ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv (-1)^x - 0 \pmod{3}$ และจากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า x เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ ดังนั้น $n^{2k} - 3^y = z^2$ จะได้ว่า

$$3^y = n^{2k} - z^2 = (n^k - z)(n^k + z)$$

และจาก 3 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ u ซึ่งทำให้ $n^k - z = 3^u$ และ $n^k + z = 3^{y-u}$ จะได้ว่า $y - u \geq u$ หรือ $y \geq 2u$ เพราะฉะนั้น $2 \cdot n^k = 3^{y-u} + 3^u = 3^u(3^{y-2u} + 1)$

และเนื่องจาก $\gcd(n, 3) = 1$ ดังนั้น 3 หาร $2 \cdot n^k$ ไม่ลงตัว เพราะฉะนั้น $u = 0$ จะได้ว่า $2 \cdot n^k = 3^y + 1$

ทฤษฎีบท 7 สมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $11^x - 3^y = z^2$

กรณีที่ 1: $y = 0$ จะได้ว่า $11^x - 1 = z^2$ และจาก $\sqrt{10}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2: $y > 0$ และจาก $11 \equiv 2 \pmod{3}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 6 มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ และ $2 \cdot 11^k = 3^y + 1$ จะได้ว่า $2 \cdot (-1)^k \equiv 1 \pmod{3}$ เพราะฉะนั้น k เป็นจำนวนคี่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ s ซึ่งทำให้ $k = 2s + 1$ จะได้ว่า $2 \cdot 11^k \equiv 2 \cdot 11^{2s+1} \equiv 2 \cdot 11 \cdot 1^s \equiv 22 \equiv 6 \pmod{8}$ ดังนั้น $2 \cdot 11^k \equiv 2 \pmod{4}$ และเนื่องจาก $3^y + 1 \equiv (-1)^y + 1 \pmod{4}$ ดังนั้น $2 \equiv (-1)^y + 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า y เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ t ซึ่งทำให้ $y = 2t$ จะได้ว่า $3^y + 1 \equiv 3^{2t} + 1 \equiv 1^t + 1 \equiv 2 \pmod{8}$ เพราะฉะนั้น $6 \equiv 2 \pmod{8}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$

ทฤษฎีบท 8 สมการไดโอแฟนไทน์ $14^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 3, 13)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $14^x - 3^y = z^2$

กรณีที่ 1: $y = 0$ จะได้ว่า $14^x - 1 = z^2$ และจาก $\sqrt{13}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

กรณีที่ 2: $y > 0$ และจาก $14 \equiv 2 \pmod{3}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 6 มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k$ และ $2 \cdot 14^k = 3^y + 1$

กรณีที่ 2.1: $k = 0$ จะได้ว่า $3^y = 1$ ดังนั้น $y = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2.2: $k = 1$ จะได้ว่า $x = 2$ และ $3^y = 27$ ดังนั้น $y = 3$ เพราะฉะนั้น $z^2 = 14^2 - 3^3 = 169$ จะได้ว่า $z = 13$ นั่นคือ $(x, y, z) = (2, 3, 13)$

กรณีที่ 2.3: $k \geq 2$ จะได้ว่า $2 \cdot 14^k \equiv 0 \pmod{8}$ ดังนั้น $3^y + 1 \equiv 0 \pmod{8}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 3

ดังนั้นจากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $14^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 3, 13)$

สรุปผลและอภิปรายผล

ผลจากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 7 และ 8 ทำให้ทราบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $11^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(0, 0, 0)$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $14^x - 3^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงสองผลเฉลย คือ $(0, 0, 0)$ และ $(2, 3, 13)$ ตามลำดับ ซึ่งในการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมภาคและทฤษฎีบทของมิโฮเลสคู และสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาต่อไป คือ การหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 3^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรีที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- Burshtein, N. 2020. All the solutions of the Diophantine equations $13^x - 5^y = z^2$, $19^x - 5^y = z^2$ in positive integers x, y, z . *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 22(2): 93-96.
- Burton, D.M. 2010. *Elementary number theory*. 7th ed., New York: McGraw-Hill.
- Chuayjan, W., Thongnak, S. and Kaewong, T. 2023. On the exponential Diophantine equation $3^x - 5^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 28(1): 25-28.
- Gope, R.C. 2023. On the exponential Diophantine equation $27^x - 11^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences*, 28: 11-15.
- Kaewong, T., Chuayjan, W. and Thongnak, S. 2023. On the exponential Diophantine equation $29^x - 3^y = z^2$. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 12(11): 74-76.
- Mihăilescu, P. 2004. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572: 167-195.
- Rao, C.G. 2022. On the exponential Diophantine equation $23^x - 19^y = z^2$. *Journal of Physical Sciences*, 27: 1-4.
- Siraworakun, A. and Tadee, S. 2024. All solutions of the Diophantine equation $25^x - 7^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(3): 631-633.
- Tadee, S. 2023. A short note on two Diophantine equations $9^x - 3^y = z^2$ and $13^x - 7^y = z^2$. *Journal of Mathematics and Informatics*, 24: 23-25.
- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. 2019. On the exponential Diophantine equation $2^x - 3^y = z^2$. *Southeast-Asian Journal of Sciences*, 7(1): 1-4.

- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. 2021. The solution of the exponential Diophantine equation $7^x - 5^y = z^2$. *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand under the Patronage of His Majesty the King*, 66(703): 62-67.
- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. 2022. On the Diophantine equation $7^x - 2^y = z^2$ where x, y and z are non-negative integers. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 25(2): 63-66.
- Thongnak, S., Kaewong, T. and Chuayjan, W. 2024. On the exponential Diophantine equation $5^x - 3^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 19(1): 99-102.