

ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$

เมื่อ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

On The Exponential Diophantine Equation $(4n-1)^x + 63^y = z^2$

where $4n-1$ is Prime

นภัสกร กสิพันธุ์¹ จิรพงศ์ พวงมาลัย² และวันวิสา พวงมาลัย^{2*}

Napatsakorn Kasiphan¹, Jirapong Puangmalai², and Wanwisa Puangmalai^{2*}

¹ โรงเรียนบ้านหนองใหญ่ 99/1 ม.9 ต.อ่างทอง อ.เมือง จ.กำแพงเพชร 62000

² มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร 69 ม.1 ต.นครชุม อ.เมือง จ.กำแพงเพชร 62000

¹ Ban Nong Yai School, 99/1 M.9, Ang Thong, Mueang, Kamphaeng Phet, 62000

² Kamphaeng Phet Rajabhat University, 69 M.1, Nakhon Chum, Mueang, Kamphaeng Phet, 62000

*Corresponding author E-mail: rakpuang.wan@gmail.com

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ เมื่อ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ พบว่ามีผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, y, z) \in \{(1, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 12), (8, 2, 1, 32)\} \cup \{(n, 0, 1, 8)\} \cup \left\{ \left(\frac{63^m + 1}{2}, 1, 2m, 63^m + 1 \right) \right\}$ เมื่อ n, m เป็นจำนวนเต็มบวก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยใช้ข้อความการันตีของคัตตาลันและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง, สมภาค, ข้อคาดการณ์ของคัตตาลัน

Abstract

In this paper, we study the exponential Diophantine equation $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ where $4n-1$ is prime. We found that all non-negative integer solutions are of the following $(n, x, y, z) \in \{(1, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 12), (8, 2, 1, 32)\} \cup \{(n, 0, 1, 8)\} \cup \left\{ \left(\frac{63^m + 1}{2}, 1, 2m, 63^m + 1 \right) \right\}$ where n, m are positive integers x, y and z are non-negative integers. In the proof, we apply reasonably Catalan's conjecture and various theorems concerning the congruence to obtain the solution.

Keywords: Exponential Diophantine Equation, Congruence, Catalan's Conjecture

บทนำ

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation) เป็นสมการหนึ่งที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ได้โดยสมการไดโอแฟนไทน์เป็นสมการพหุนาม (Polynomial Equation) ประเภทหนึ่งที่พิจารณาหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้นและสมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบหนึ่งที่ได้รับความสนใจคือ $a^x + b^y = z^2$

ในปี 2007 Acu ได้ศึกษาสมการ $2^x + 5^y = z^2$ ได้พิสูจน์ว่า $(3,0,3)$ และ $(2,1,3)$ เป็นเพียงสองคำตอบ (x,y,z) โดยที่ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (Acu, 2007)

ในปี 2014 Sroysang ได้ศึกษาสมการ $5^x + 63^y = z^2$ ได้พิสูจน์ว่า $(0,1,8)$ เป็นเพียงคำตอบเดียว คือ (x,y,z) โดยที่ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (Sroysang, 2014)

ในปี 2019 Makate และคณะ ได้ศึกษาว่า $8^x + 61^y = z^2$ และ $8^x + 67^y = z^2$ มีคำตอบเฉพาะเหมือนกัน $(x,y,z) = (1,0,3)$ (Makate et al., 2019)

ในปี 2021 สุทธิวัฒน์ ทองนาค และคณะ ได้พิสูจน์สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $7^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยหนึ่งเดียว คือ $(x,y,z) = (0,0,0)$ เมื่อ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (สุทธิวัฒน์ ทองนาค และคณะ, 2021)

ในปี 2025 Viriyapong และคณะ ได้ศึกษาว่า $63^x + 323^y = z^2$ ได้พิสูจน์ว่า $(1,0,8)$ และ $(0,1,18)$ เป็นเพียงสองคำตอบ (x,y,z) โดยที่ x,y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (Viriyapong et al., 2025)

จากงานวิจัยดังกล่าวข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาหาผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบในรูปแบบทั่วไป (n,x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ เมื่อ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีการดำเนินการวิจัย

การศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์นั้น จะใช้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับข้อคาดการณ์ของกาตาลัน (Catalan's Conjecture) และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเรื่องสมภาค (Congruence) ดังนั้นก่อนอื่นจึงขอทบทวนบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (ข้อคาดการณ์ของกาตาลัน) (Mihăilescu, 2004) สมการไดโอแฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ โดยที่ a,b,x และ y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ $\min\{a,b,x,y\} > 1$ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว $(a,b,x,y) = (3,2,2,3)$

บทตั้ง 2 สำหรับ $\min\{z, 4n-1, 2, x\} > 1$ และสมการไดโอแฟนไทน์ $z^2 - (4n-1)^x = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ กำหนดให้ x,z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยที่ $\min\{z, 4n-1, 2, x\} > 1$

จากทฤษฎีบท 1 และสมการไดโอแฟนไทน์ $z^2 - (4n-1)^x = 1$

ทำให้ได้ว่าผลเฉลยคือ $(3,2,2,3) = (a,b,x,y) = (z, 4n-1, 2, x)$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่ $4n-1 = 2$

ดังนั้น สมการ $z^2 - (4n-1)^x = 1$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทตั้ง 3 สมการไดโอแฟนไทน์ $1+63^y = z^2$ โดยที่ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว คือ $(y, z) = (1, 8)$

พิสูจน์ กำหนดให้ y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

โดยแยก พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

กรณี $y = 0$, จะได้ $z^2 = 1 + 63^0$

$$z^2 = 2$$

$$z = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

กรณี $y = 1$, จะได้ $z^2 = 1 + 63^1$

$$z^2 = 64$$

$$z = 8 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

และกรณี $y > 1$, จะได้ $z^2 = 1 + 63^y$

$$z^2 - 63^y = 1$$

จากทฤษฎีบท 1 และสมการไดโอแฟนไทน์ $z^2 - 63^y = 1$

ทำให้ได้ว่าผลเฉลยคือ $(3, 2, 2, 3) = (a, b, x, y) = (z, 63, 2, y)$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่ $2 = 63$

นั่นคือ $z^2 - 63^y = 1$ ไม่มีผลเฉลย เมื่อ $y > 1$

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์ $1+63^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว คือ $(y, z) = (1, 8)$

บทตั้ง 4 ถ้า $(-1)^x + (-1)^y \equiv 0 \pmod{4}$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคู่และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

พิสูจน์ กำหนดให้ $(-1)^x + (-1)^y \equiv 0 \pmod{4}$

1) ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่

ทำให้ได้ว่า $(-1)^x + (-1)^y \equiv 1 + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$

นั่นคือ x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่พร้อมกันไม่ได้

2) ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

ทำให้ได้ว่า $(-1)^x + (-1)^y \equiv (-1) + (-1) \equiv -2 \not\equiv 0 \pmod{4}$

นั่นคือ x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่พร้อมกันไม่ได้

ดังนั้น ถ้า $(-1)^x + (-1)^y \equiv 0 \pmod{4}$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคู่และ y เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่และ y เป็นจำนวนเต็มคู่ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

บทตั้ง 5 ถ้า $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\sqrt{n}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n=1$

พิสูจน์ กำหนดให้ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\sqrt{n}$ เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ $4n-1 = p$ สำหรับบาง p ที่เป็นจำนวนเฉพาะ

และ $\sqrt{n} = k$ สำหรับบาง k ที่เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $n = \frac{p+1}{4}$

$$\sqrt{n} = \frac{\sqrt{p+1}}{2}$$

$$\text{จะได้ } k = \frac{\sqrt{p+1}}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } 4k^2 = p+1$$

$$p = 4k^2 - 1 = (2k+1)(2k-1)$$

จาก p ที่เป็นจำนวนเฉพาะ

$$\text{จะได้ } 2k-1=1 \text{ และ } 2k+1=p$$

$$\text{นั่นคือ } k=1 \text{ และ } p=3$$

$$\text{ฉะนั้น } n=1$$

ดังนั้น ถ้า $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $\sqrt{n}$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n=1$

ผลการวิจัย

ต่อไปจะกล่าวถึงการหาผลเฉลยสมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ เมื่อ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ทฤษฎีบท 6 สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ มีผลเฉลยคือ

$$(n, x, y, z) \in \{(1, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 12), (8, 2, 1, 32)\} \cup \{(n, 0, 1, 8)\} \cup \left\{ \left(\frac{63^m+1}{2}, 1, 2m, 63^m+1 \right) \right\}$$

เมื่อ n, m เป็นจำนวนเต็มบวก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ กำหนดให้ n, m เป็นจำนวนเต็มบวก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

$$\text{ที่ทำให้ } (4n-1)^x + 63^y = z^2 \quad (1)$$

การพิสูจน์เราจะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ได้แก่ $x=0, x=1, x>1$

$$\text{กรณีที่ 1 } x=0, \quad \text{จากสมการ (1) จะได้ } (4n-1)^0 + 63^y = z^2$$

$$1 + 63^y = z^2$$

จากบทตั้ง 3 จะได้ว่า $1 + 63^y = z^2$ มีผลเฉลยเดียวคือ $(1, 8)$

ดังนั้น กรณีที่ $x=0$ สมการ $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ มีผลเฉลยเดียว คือ $(n, x, y, z) = (n, 0, 1, 8)$ สำหรับ n ที่ทำให้ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$$\text{กรณีที่ 2 } x=1, \quad \text{จากสมการ (1) จะได้ } (4n-1) + 63^y = z^2$$

$$\text{เขียนรูปใหม่} \quad z^2 - 63^y = (4n-1) \quad (2)$$

ต่อไปนี้จะแก้สมการ (2) โดยการแบ่งกรณีเป็น 3 กรณีย่อยดังต่อไปนี้

$$\text{กรณีย่อย } y=0, \text{ จากสมการ (2) จะได้ } z^2 - 63^0 = (4n-1)$$

$$z^2 - 1 = (4n-1)$$

$$z^2 = 4n-1+1$$

$$z = 2\sqrt{n}$$

จาก บทตั้ง 5 จะได้ว่า $n=1$ ซึ่งทำให้ $z=2$

ดังนั้น กรณีที่ $x=1, y=0$ จากสมการ $z^2 - 63^y = (4n-1)$ มีผลเฉลยคือ $(n, x, y, z) = (1, 1, 0, 2)$

กรณีย่อย $y=1$, จากสมการ (2) จะได้ $z^2 - 63^1 = (4n-1)$

$$\begin{aligned} z^2 &= 4n + 62 \\ z &= \sqrt{4n + 62} \end{aligned}$$

เนื่องจาก z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า z เป็นจำนวนเต็มคู่ และจะได้ $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

จะได้ $4n + 4 \cdot 15 + 2 = 4n + 62 = z^2 = 4k$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ไม่สามารถหาค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ดังนั้นกรณีที่ $x=1, y=1$ จากสมการ $z^2 - 63^y = (4n-1)$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีย่อย $y>1$, จากสมการ (2) จะได้ $z^2 - 63^y = (4n-1)$

เขียนรูปใหม่ $(4n-1) + 63^y = z^2$ (3)

จาก 63^y และ $(4n-1)$ เป็นจำนวนเต็มคู่จะได้ว่า $(4n-1) + 63^y$ เป็นจำนวนเต็มคู่

จากสมการ (3) ทำให้ z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

จะได้ $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

นั่นคือ $(4n-1) + 63^y \equiv 0 \pmod{4}$

จาก $(4n-1) \equiv -1 \pmod{4}$ (4)

และจาก $63 \equiv -1 \pmod{4}$ จะได้ $63^y \equiv (-1)^y \pmod{4}$ (5)

จากสมการ (4) กับ (5) จะได้ $(-1) + (-1)^y \equiv (4n-1) + 63^y \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4}$ (6)

จากบทตั้ง 4 ทำให้ y เป็นจำนวนเต็มคู่ นั่นคือ $y = 2m, \exists m \in \mathbb{Z}^+$

จะได้ $(4n-1) + 63^{2m} = z^2$

$$(4n-1) = z^2 - 63^{2m}$$

จาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $1(4n-1) = (z - 63^m)(z + 63^m)$ (7)

เนื่องจาก $1 < (4n-1)$ และ $z - 63^m < z + 63^m$

จาก (7) จะได้ $1 = z - 63^m$ (8)

และ $4n-1 = z + 63^m$ (9)

พิจารณา (9)-(8) จะได้ $(4n-1) - 1 = (z + 63^m) - (z - 63^m)$

$$4n-2 = 2 \cdot 63^m$$

$$2(2n-1) = 2 \cdot 63^m$$

จะได้ $63^m = 2n-1$

นั่นคือ $n = \frac{63^m + 1}{2}$

ดังนั้น กรณีที่ $x=1, y>1$ จากสมการ $(4n-1) + 63^y = z^2$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คือ $(n, x, y, z) = (\frac{63^m + 1}{2}, 1, 2m, 63^m + 1)$ สำหรับบาง $m \in \mathbb{Z}^+$ และ $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณีที่ 3 ถ้า $x>1$

ต่อไปนี้จะแก้สมการ (1) โดยการแบ่งกรณีเป็น 3 กรณีย่อยดังต่อไปนี้

กรณีย่อย $y = 0$

จากสมการ (1) จะได้ $(4n-1)^x + 63^0 = z^2$
 $(4n-1)^x + 1 = z^2$

เขียนรูปใหม่ $z^2 - (4n-1)^x = 1$

จากบทตั้ง 2 สมการ $z^2 - (4n-1)^x = 1$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ดังนั้น กรณีที่ $x > 1, y = 0$ จากสมการ $z^2 - (4n-1)^x = 1$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีย่อย $y = 1$

จากสมการ (1) จะได้ $(4n-1)^x + 63 = z^2$

จาก $(4n-1)^x$ และ 63 เป็นจำนวนเต็มคู่จะได้ว่า $(4n-1)^x + 63^1$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ทำให้ z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

นั่นคือ $(4n-1)^x + 63^1 \equiv 0 \pmod{4}$

จาก $4n-1 \equiv -1 \pmod{4}$ จะได้ $(4n-1)^x \equiv (-1)^x \pmod{4}$

และจาก $63 \equiv -1 \pmod{4}$

จะได้ $(-1)^x + (-1) \equiv (4n-1)^x + 63^1 \pmod{4}$
 $\equiv 0 \pmod{4}$

จากบทตั้ง 4 ทำให้ x เป็นจำนวนเต็มคู่ นั่นคือ $x = 2s$ โดยที่ $s \in \mathbb{Z}^+$

จะได้ $(4n-1)^{2s} + 63 = z^2$
 $63 = z^2 - (4n-1)^{2s}$
 $1(63) = (z - (4n-1)^s)(z + (4n-1)^s)$

เนื่องจาก $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$ จะแยกพิจารณา ดังนี้

กรณี $63 = 1 \cdot 63$

เนื่องจาก $1 < 63$ และ $z - (4n-1)^s < z + (4n-1)^s$

จะได้ $1 = z - (4n-1)^s$

และ $63 = z + (4n-1)^s$

จะได้ $63 - 1 = (z + (4n-1)^s) - (z - (4n-1)^s)$

$62 = 2 \cdot (4n-1)^s$

จะได้ $(4n-1)^s = 31$

จาก 31 เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $s = 1$ และ $n = 8$

ในกรณีนี้จะได้ $(n, x, y, z) = (8, 2, 1, 32)$

กรณี $63 = 3 \cdot 21$

เนื่องจาก $3 < 21$ และ $z - (4n-1)^s < z + (4n-1)^s$

จะได้ $3 = z - (4n-1)^s$

และ $21 = z + (4n-1)^s$

จะได้ $21 - 3 = (z + (4n-1)^s) - (z - (4n-1)^s)$

$18 = 2 \cdot (4n-1)^s$

จะได้ $(4n-1)^s = 9$

จาก $3^2 = 9$ และ 3 เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $s = 2$ และ $n = 1$

ในกรณีนี้จะได้ $(n, x, y, z) = (1, 4, 1, 12)$

กรณี $63 = 7 \cdot 9$

เนื่องจาก $7 < 9$ และ $z - (4n-1)^s < z + (4n-1)^s$

จะได้ $7 = z - (4n-1)^s$

และ $9 = z + (4n-1)^s$

จะได้ $9 - 7 = (z + (4n-1)^s) - (z - (4n-1)^s)$

$$2 = 2 \cdot (4n-1)^s$$

จะได้ $(4n-1)^s = 1$ นั่นคือ $s = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น กรณีที่ $x > 1, y = 1$ จากสมการ $(4n-1)^x + 63 = z^2$ ผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คือ $(n, x, y, z) \in \{(1, 4, 1, 12), (8, 2, 1, 32)\}$

กรณีย่อย $y > 1$

จากสมการ (1) จะได้ $(4n-1)^x + 63^y = z^2$

จาก $(4n-1)^x$ และ 63^y เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $(4n-1)^x + 63^y$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ทำให้ z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

นั่นคือ $(4n-1)^x + 63^y \equiv 0 \pmod{4}$

จาก $4n-1 \equiv -1 \pmod{4}$ จะได้ $(4n-1)^x \equiv (-1)^x \pmod{4}$

และจาก $63 \equiv -1 \pmod{4}$ จะได้ $63^y \equiv (-1)^y \pmod{4}$

และจะได้ $(-1)^x + (-1)^y \equiv (4n-1)^x + 63^y \pmod{4}$
 $\equiv 0 \pmod{4}$

จากบทตั้ง 4 จะได้ x เป็นจำนวนเต็มคู่และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

หรือ x เป็นจำนวนเต็มคี่และ y เป็นจำนวนเต็มคู่

กรณี x เป็นจำนวนเต็มคู่และ y เป็นจำนวนเต็มคี่

กำหนดให้ $x = 2w$ และ $y = 2p+1$ สำหรับบาง $w, p \in \mathbb{Z}^+$

จากสมการ (1) จะได้ $(4n-1)^{2w} + 63^{2p+1} = z^2$

$$63^{2p+1} = z^2 - (4n-1)^{2w}$$

$$63^{2p+1} = (z - (4n-1)^w)(z + (4n-1)^w)$$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก u ที่ $p \geq u$ และทำให้

$$63^{2p+1-u} \cdot 63^u = (z - (4n-1)^w)(z + (4n-1)^w)$$

เนื่องจาก $63^u < 63^{2p+1-u}$ และ $z - (4n-1)^w < z + (4n-1)^w$

จะได้ $63^u = z - (4n-1)^w$

และ $63^{2p+1-u} = z + (4n-1)^w$

จะได้ $63^{2p+1-u} - 63^u = (z + (4n-1)^w) - (z - (4n-1)^w)$

$$63^u (63^{2p+1-2u} - 1) = 2 \cdot (4n-1)^w$$

จะเห็นว่า $63 = 3^2 \cdot 7$ และ 63 เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า 63^u เป็นจำนวนเต็มคี่

นั่นคือ $63^u \neq 2(4n-1)^{w-h}$ ทุกจำนวนเต็มบวก h ที่ $h \leq w$

ฉะนั้น $63^u = (4n-1)^h$ และ $63^{2p+1-2u} - 1 = 2(4n-1)^{w-h}$

จาก $63 = 3^2 \cdot 7$ จะได้ว่า $63^u = 3^{2u} \cdot 7^u$

และจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $3^{2u} \cdot 7^u = 63^u = (4n-1)^h$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ทำให้สมการ $(4n-1)^{2w} + 63^{2p+1} = z^2$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เมื่อ $w, p \in \mathbb{Z}^+$

กรณี x เป็นจำนวนเต็มคี่และ y เป็นจำนวนเต็มคู่

กำหนดให้ $x = 2s+1$ และ $y = 2q$ สำหรับบาง $s, q \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้นจะพิสูจน์ในสมการ (1)

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad (4n-1)^{2s+1} + 63^{2q} &= z^2 \\ (4n-1)^{2s+1} &= z^2 - 63^{2q} \\ (4n-1)^{2s+1} &= (z - 63^q)(z + 63^q) \end{aligned}$$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก t ที่ $s \geq t$ และทำให้

$$(4n-1)^{2s+1-t} \cdot (4n-1)^t = (z - 63^q)(z + 63^q)$$

เนื่องจาก $(4n-1)^t < (4n-1)^{2s+1-t}$ และ $z - 63^q < z + 63^q$

$$\text{จะได้} \quad (4n-1)^t = z - 63^q$$

$$\text{และ} \quad (4n-1)^{2s+1-t} = z + 63^q$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad (4n-1)^{2s+1-t} - (4n-1)^t &= (z + 63^q) - (z - 63^q) \\ (4n-1)^t ((4n-1)^{2s+1-2t} - 1) &= 2 \cdot 63^q \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $4n-1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $(4n-1)^t$ เป็นจำนวนเต็มคี่

นั่นคือ $(4n-1)^t \neq 2 \cdot 63^{q-j}$ ทุกจำนวนเต็มบวก j ที่ $j \leq q$

ฉะนั้น $(4n-1)^t = 63^j$ และ $(4n-1)^{2s+1-2t} - 1 = 2 \cdot 63^{q-j}$

จาก $63 = 3^2 \cdot 7$ จะได้ว่า $63^j = 3^{2j} \cdot 7^j$

และจาก $4n-1$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า $(4n-1)^t = 63^j = 3^{2j} \cdot 7^j$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ทำให้สมการ $(4n-1)^{2s+1} = z^2 - 63^{2q}$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ โดยที่ $s, q \in \mathbb{Z}^+$

ดังนั้น กรณีที่ $x > 1, y > 1$ จากสมการ $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ดังนั้น สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ มีผลเฉลยคือ

$$(n, x, y, z) \in \{(1, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 12), (8, 2, 1, 32)\} \cup \{(n, 0, 1, 8)\} \cup \left\{ \left(\frac{63^m + 1}{2}, 1, 2m, 63^m + 1 \right) \right\}$$

เมื่อ n, m เป็นจำนวนเต็มบวก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 6 จึงยกตัวอย่างที่สอดคล้อง 4 ตัวอย่าง ดังนี้

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $n=1$ จะได้ $4n-1=3$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 63^y = z^2$ ผลเฉลยคือ $(n, x, y, z) \in \{(1, 0, 1, 8), (1, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 12)\}$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $n=2$ จะได้ $4n-1=7$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $7^x + 63^y = z^2$ ผลเฉลยคือ $(n, x, y, z) = (2, 0, 1, 8)$ เพียงผลเฉลยเดียว

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $n=8$ จะได้ $4n-1=31$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $31^x + 63^y = z^2$ ผลเฉลยคือ $(n, x, y, z) \in \{(8, 0, 1, 8), (8, 2, 1, 32)\}$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ $m=1$ จะได้ $n = \frac{63+1}{2} = 32$ และ $4n-1=4(32)-1=127$ เป็นจำนวนเฉพาะ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $127^x + 63^y = z^2$ ผลเฉลยคือ $(n, x, y, z) \in \{(32, 0, 1, 8), (32, 1, 2, 64)\}$

สรุปผล

สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $(4n-1)^x + 63^y = z^2$ มีผลเฉลยคือ $(n, x, y, z) \in \{(1, 1, 0, 2), (1, 4, 1, 12), (8, 2, 1, 32)\} \cup \{(n, 0, 1, 8)\} \cup \left\{ \left(\frac{63^m+1}{2}, 1, 2m, 63^m+1 \right) \right\}$ เมื่อ n, m เป็นจำนวนเต็มบวก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ข้างต้นสามารถประยุกต์ใช้ได้หลายรูปแบบ ดังแสดงในตัวอย่าง

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่สนับสนุนและส่งเสริมการทำวิจัยดังกล่าวให้สำเร็จลุล่วง

เอกสารอ้างอิง

- สุทธิวัฒน์ ทองนาค, วาเรียม ช่วยจันทร์ และ อีรเดช เกี้ยววงศ์. (2564). สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลัง $7^x - 5^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยหนึ่งเดียว คือ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ. *วารสารคณิตศาสตร์*, 66(703), 62-67.
- Acu, D. (2007). On A Diophantine Equation $2^x + 5^y = z^2$. *General Mathematics*, 4, p. 145 - 148.
- Makate, N., Srimud, K, Warong, A., and Supjaroen, W. (2019). On The Diophantine Equation $8^x + 61^y = z^2$ and $8^x + 67^y = z^2$. *Mathematical Journal by The Mathematical Association of Thailand Under The Patronage of His Majesty the King*, 64 (697), p. 24 - 29.
- Mihailescu, P. (2004). Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 572: 167-195.
- Sroysang, B. (2014). On The Diophantine Equation $5^x + 63^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 91(4), p. 541-544.
- Viriyapong, C and Puiwong, J. (2025). On the Diophantine equation $63^x + 323^y = z^2$. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 20(1): 419-421.