

สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$

On the Diophantine equation $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$

จิระพงศ์ มะวงศ์ษา¹ และสุธน ตาดี^{2*}

Jirapong Mavongsa¹ and Suton Tadee^{2*}

¹โรงเรียนศรีวินิตวิทยาคม สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสิงห์บุรี อ่างทอง

²สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

¹Srivinitwitthayakom School, The Secondary Educational Service Area Office Singburi Angthong

²Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Thepsatri Rajabhat University

*Corresponding author E-mail: suton.t@lawasri.tru.ac.th

บทคัดย่อ

ในปี ค.ศ. 2022 Gope และ Masud ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ภายหลังจากที่คณะผู้วิจัยได้ศึกษาพบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้น ในงานวิจัยนี้จึงได้แสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 1)$ และ $(3, 0, 5)$ โดยใช้ความรู้พื้นฐานทฤษฎีจำนวน นอกจากนั้นยังขยายผลที่ได้ไปยังสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบอื่นที่สัมพันธ์กัน เช่น พหุคูณของ x , $y + 1$, พหุคูณของ z และ z^{2n}

คำสำคัญ: สมการไดโอแฟนไทน์ สมภาค ผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Abstract

In 2022, Gope and Masud proved that the Diophantine equation $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ has no non-negative integer solution. After studying, we found that the Diophantine equation has a non-negative integer solution. Thus, in this article, we show that the Diophantine equation $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ has exactly two non-negative integer solutions (x, y, z) , which are $(1, 0, 1)$ and $(3, 0, 5)$, by using basic knowledge of number theory. Moreover, the results can also be extended to other related forms of Diophantine equations, such as multiples of x , $y + 1$, multiples of z and z^{2n} .

Keywords: Diophantine equation, Congruence, Non-negative integer solution

บทนำ

ในรอบทศวรรษที่ผ่านมา สมการไดโอแฟนไทน์รูปแบบหนึ่งที่มีความสนใจในการศึกษาหาผลเฉลยคือ สมการไดโอแฟนไทน์เลขชี้กำลังที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งที่อยู่ในรูปผลรวมและผลต่าง ตัวอย่างสมการที่อยู่ในรูปผลรวม เช่น ในปี ค.ศ. 2019 Laipaporn et al. (2019) ได้ศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + p5^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถัดมาในปี ค.ศ. 2022 Thongnak et al. (2022a) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $11 \cdot 3^x + 11^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น คือ $(2, 0, 10)$ และต่อมา Tadee (2023) ได้ขยายผลงานวิจัยของ Thongnak et al. (2022a) โดยการศึกษาและหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์

$p^x + pq^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน ในปี ค.ศ. 2024 Phosri and Tadee (2024) ได้ค้นพบเงื่อนไขการไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $q^x + p(2q + 1)^y = z^2$ และ $q^x + p(4q + 1)^y = z^2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ

สำหรับตัวอย่างงานวิจัยที่เกี่ยวกับสมการที่อยู่ในรูปผลต่าง เช่น ในปี ค.ศ. 2022 Thongnak et al. (2022b) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $5^x - 2 \cdot 3^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และในปีเดียวกัน Gope and Masud (2022) ได้พิสูจน์ว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แต่หลังจากที่คณะผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยดังกล่าวของ Gope and Masud (2022) พบว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นในงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยจึงได้สนใจที่จะศึกษาหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น สมภาค (Congruence) เป็นต้น

วิธีการดำเนินการวิจัย

การหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ นั้น ในที่นี้จะใช้ความรู้เกี่ยวกับสมภาค ด้วยเหตุนี้จึงขอทบทวนความหมายและสมบัติของสมภาคดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1 (Burton, 2010, p. 63) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะกล่าวว่าสองจำนวนเต็ม a และ b สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์ มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ เมื่อ n หาร $a - b$ ลงตัว

ทฤษฎีบท 1 (Burton, 2010, p. 65) ให้ $n > 1$ และ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) $a \equiv a \pmod{n}$
- 2) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
- 3) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
- 4) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$
- 5) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
- 6) ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 2 (Tadee, 2024, p.13) ถ้า z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ แล้ว $z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$

พิสูจน์ ให้ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นจะมี $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ซึ่งทำให้ $z \equiv r \pmod{5}$

กรณีที่ 1: $r = 0$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod{5}$

กรณีที่ 2: $r = 1$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{5}$

กรณีที่ 3: $r = 2$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{5}$

กรณีที่ 4: $r = 3$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}$

กรณีที่ 5: $r = 4$ จะได้ว่า $z^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}$

จากทั้ง 5 กรณี สรุปได้ว่า $z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$

นอกจากนี้ยังมีอีกหนึ่งทฤษฎีบทที่มีบทบาทสำคัญในการศึกษาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ ซึ่งพิสูจน์โดย Zhang and Li เมื่อปี ค.ศ. 2024

ทฤษฎีบท 4 (Zhang and Li, 2024, p.11) สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x = y^2 + 2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(x, y) = (1, 1)$ และ $(x, y) = (3, 5)$

ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการพิสูจน์เพื่อหาผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบทั้งหมดของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ และขยายผลไปยังสมการไดโอแฟนไทน์อื่นที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก่อนอื่นจะพิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n \equiv 3 \pmod{20}$ จะได้ว่า ถ้าสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) แล้ว x เป็นจำนวนคี่ และ $y = 0$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $n^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ เนื่องจาก $n \equiv 3 \pmod{20}$ ดังนั้น $n \equiv 3 \pmod{4}$ และ $n \equiv 3 \pmod{5}$ จะได้ว่า $n^x - 2 \cdot 5^y \equiv (-1)^x - 2 \cdot 1^y \equiv (-1)^x - 2 \pmod{4}$ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv (-1)^x - 2 \pmod{4}$ สมมติว่า x เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $z^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เนื่องจากขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 ดังนั้น x เป็นจำนวนคี่ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ k ซึ่งทำให้ $x = 2k + 1$

สมมติว่า $y \neq 0$ ดังนั้น $n^x - 2 \cdot 5^y \equiv 3^{2k+1} - 2 \cdot 0^y \equiv 3^{2k+1} \equiv 3 \cdot 9^k \equiv 3 \cdot (-1)^k \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น $z^2 \equiv 3 \cdot (-1)^k \equiv 2, 3 \pmod{5}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากขัดแย้งกับทฤษฎีบท 3 ดังนั้น $y = 0$

ทฤษฎีบท 6 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 1)$ และ $(3, 0, 5)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ และจากบทตั้ง 5 จะได้ว่า x เป็นจำนวนคี่ และ $y = 0$ เพราะฉะนั้น $3^x = z^2 + 2$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $(x, z) = (1, 1)$ และ $(x, z) = (3, 5)$ นั่นคือ $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y, z) = (3, 0, 5)$

จากทฤษฎีบท 6 เมื่อพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์อื่นที่สามารถเขียนได้ในรูปพหุคูณของ x อาทิ $2x$ และ $3x$ จะได้ผลเฉลยดังบทแทรก 7 และบทแทรก 8 ตามลำดับ

บทแทรก 7 สมการไดโอแฟนไทน์ $9^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y และ z ซึ่งทำให้ $9^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ ดังนั้น $3^{2x} - 2 \cdot 5^y = z^2$ และจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(2x, y, z) = (1, 0, 1)$ และ $(2x, y, z) = (3, 0, 5)$

กรณีที่ 1: $(2x, y, z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้น $2x = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2: $(2x, y, z) = (3, 0, 5)$ ดังนั้น $2x = 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $9^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทแทรก 8 สมการไดโอแฟนไทน์ $27^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 5)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $27^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ เพราะฉะนั้น $3^{3x} - 2 \cdot 5^y = z^2$ และจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(3x, y, z) = (1, 0, 1)$ และ $(3x, y, z) = (3, 0, 5)$

กรณีที่ 1: $(3x, y, z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้น $3x = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก x เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2: $(3x, y, z) = (3, 0, 5)$ ดังนั้น $3x = 3, y = 0$ และ $z = 5$ นั่นคือ $(x, y, z) = (1, 0, 5)$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $27^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 5)$

จากทฤษฎีบท 6 เมื่อพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์อื่นที่สามารถเขียนได้ในรูป $y + 1$ จะได้ผลเฉลยดังบทแทรก 9

บทแทรก 9 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 10 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y และ z ซึ่งทำให้ $3^x - 10 \cdot 5^y = z^2$ ดังนั้น $3^x - 2 \cdot 5^{y+1} = z^2$ และจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(x, y + 1, z) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y + 1, z) = (3, 0, 5)$

กรณีที่ 1: $(x, y + 1, z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้น $y + 1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

กรณีที่ 2: $(x, y + 1, z) = (3, 0, 5)$ ดังนั้น $y + 1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก y เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 10 \cdot 5^y = z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จากทฤษฎีบท 6 เมื่อพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์อื่นที่สามารถเขียนได้ในรูปพหุคูณของ z อาทิ $2z$ และ $5z$ จะได้ผลเฉลยดังบทแทรก 10 และบทแทรก 11 ตามลำดับ

บทแทรก 10 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = 4 \cdot z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ x, y และ z ซึ่งทำให้ $3^x - 2 \cdot 5^y = 4 \cdot z^2$ ดังนั้น $3^x - 2 \cdot 5^y = (2z)^2$ และจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(x, y, 2z) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y, 2z) = (3, 0, 5)$

กรณีที่ 1: $(x, y, 2z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้น $2z = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2: $(x, y, 2z) = (3, 0, 5)$ ดังนั้น $2z = 5$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = 4 \cdot z^2$ ไม่มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทแทรก 11 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = 25 \cdot z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(3, 0, 1)$

พิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x - 2 \cdot 5^y = 25 \cdot z^2$ เพราะฉะนั้น $3^x - 2 \cdot 5^y = (5z)^2$ และจากทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(x, y, 5z) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y, 5z) = (3, 0, 5)$

กรณีที่ 1: $(x, y, 5z) = (1, 0, 1)$ ดังนั้น $5z = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก z เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2: $(x, y, 5z) = (3, 0, 5)$ ดังนั้น $x = 3, y = 0$ และ $5z = 5$ นั่นคือ $(x, y, z) = (3, 0, 1)$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = 25 \cdot z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(3, 0, 1)$

จากทฤษฎีบท 6 ได้ขยายผลไปยังสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^{2n}$ จะได้ผลเฉลยดังบทแทรก 12
บทแทรก 12 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^{2n}$ มีผลเฉลยจำนวน
 เต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, n) ทั้งหมด คือ $(1, 0, 1, n)$ และ $(3, 0, 5, 1)$

พิสูจน์ ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ซึ่งทำให้ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^{2n}$ ดังนั้น $3^x - 2 \cdot 5^y = (z^n)^2$ และจาก
 ทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า $(x, y, z^n) = (1, 0, 1)$ และ $(x, y, z^n) = (3, 0, 5)$

กรณีที่ 1: $(x, y, z^n) = (1, 0, 1)$ ดังนั้น $x = 1, y = 0$ และ $z^n = 1$ เพราะฉะนั้น $z = 1$ จะได้ว่า $(x, y, z, n) =$
 $(1, 0, 1, n)$

กรณีที่ 2: $(x, y, z^n) = (3, 0, 5)$ ดังนั้น $x = 3, y = 0$ และ $z^n = 5$ เพราะฉะนั้น $z = 5$ และ $n = 1$ จะได้ว่า
 $(x, y, z, n) = (3, 0, 5, 1)$

จากทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^{2n}$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z, n)
 ทั้งหมด คือ $(1, 0, 1, n)$ และ $(3, 0, 5, 1)$

วิจารณ์ผล

จากการใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวน เช่น สมภาค ร่วมกับทฤษฎีบทของ Zhang and Li (2024)
 ทำให้สามารถพิสูจน์ได้ว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ มีผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z)
 ทั้งหมดเพียงสองผลเฉลยเท่านั้น คือ $(1, 0, 1)$ และ $(3, 0, 5)$ ซึ่งเป็นการแก้ไขข้อค้นพบของ Gope and Masud
 (2022) ให้ถูกต้อง นอกจากนั้นยังขยายผลที่ได้ไปยังสมการไดโอแฟนไทน์ในรูปแบบอื่นที่สัมพันธ์กัน เช่น พหุคูณ
 ของ $x, y + 1$, พหุคูณของ z และ z^{2n} และสิ่งที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้าต่อไป คือ การหาผลเฉลยจำนวน
 เต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $n^x - 2 \cdot 5^y = z^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สรุปผล

จากการวิจัยพบว่า $(1, 0, 1)$ และ $(3, 0, 5)$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (x, y, z) ทั้งหมดของ
 สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณสถาบันวิจัยและพัฒนา และคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏ
 เทพสตรี และโรงเรียนศรีวินิตวิทยาคม สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาสิงห์บุรี อ่างทอง ที่ให้การ
 สนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- Burton, D.M. 2010. *Elementary number theory*. 7th ed., New York: McGraw-Hill.
- Gope, R.C. and Masud, Md. A.B. 2022. On the exponential Diophantine equation $3^x - 2 \cdot 5^y = z^2$.
Journal of Physical Sciences, 27: 27-30.
- Laipaporn, K., Wananiyakul, S. and Khachorncharoenkul, P. 2019. On the Diophantine equation
 $3^x + p5^y = z^2$. *Walailak Journal of Science and Technology*, 16(9): 647-653.
- Phosri, P. and Tadee, S. 2024. On the Diophantine equations $q^x + p(2q + 1)^y = z^2$ and $q^x +$
 $p(4q + 1)^y = z^2$. *Thai Journal of Mathematics*, 22(2): 389-395.

- Tadee, S. 2023. Solutions of the Diophantine equation $p^x + pq^y = z^2$ where p and q are distinct prime numbers. *Journal of Science & Technology, Ubon Ratchatani University*, 25(1): 57-61. (in Thai)
- Tadee, S. 2024. On the solutions of the Diophantine equation $(p+2)^x + 4 \cdot p^y = z^2$. *Academic Journal of Science and Applied Science, Faculty of Science and Technology, Uttaradit Rajabhat University*, 1: 11-16. (in Thai)
- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. 2022a. On the Diophantine equation $11 \cdot 3^x + 11^y = z^2$ where x, y and z are non-negative integers. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 25(1): 51-54.
- Thongnak, S., Chuayjan, W. and Kaewong, T. 2022b. On the exponential Diophantine equation $5^x - 2 \cdot 3^y = z^2$. *Annals of Pure and Applied Mathematics*, 25(2): 109-112.
- Zhang, J. and Li, Y. 2024. On the equation $(-1)^a p^x + (-1)^b (2^k(2p-1))^y = z^2$ for prime pairs $(p, 2p-1)$. *Integers*, 24: 1-16.