

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นด้วยกฎการสลับที่เหมาะสม

Stability analysis of switched positive nonlinear systems with a suitable switching law

สุริยล ยิ้มเนตร^{1*} และอิสรา โสตา¹

Suriyon Yimnet^{1*} and Aisara Soda¹

¹ หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ 67000

¹ Department of Applied Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology,
Phetchabun Rajabhat University, Phetchabun 67000

*Corresponding author E-mail: suriyon.yim@pcru.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยอาศัยวิธีการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวกและการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อย ก่อให้เกิดทฤษฎีใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อยืนยันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบที่ศึกษา อีกทั้งมีการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากงานวิจัยอื่น พบว่างานวิจัยนี้มีความเป็นไปได้มากกว่า เนื่องจากความไม่เชิงเส้นของระบบและกลยุทธ์ของการใช้กฎการสลับที่ได้เลือกมาศึกษา นอกจากนี้ยังมีการนำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันความถูกต้องของการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีที่ได้ถูกสร้างขึ้นจากงานวิจัยนี้

คำสำคัญ : ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น, ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด, กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อย

Abstract

This paper examines the stability of switched positive nonlinear systems with all unstable subsystems. A discretized co-positive Lyapunov function, combined with a mode-dependent dwell time switching law, yields novel sufficient conditions for ensuring global uniform asymptotic stability for these systems. Comparison with prior work demonstrates greater generality, owing to both the systems' nonlinearity and the specific switching strategy. A numerical example supports the theoretical findings.

Keywords : switched positive nonlinear system, all unstable subsystems, mode-dependent dwell time switching law

บทนำ

ในงานวิจัยของ Xiang et al., (2017) ได้กล่าวไว้ว่า ระบบสลับที่เป็นบวก (switched positive nonlinear system) เป็นระบบซึ่งประกอบด้วยกลุ่มของระบบย่อยที่เป็นบวกและกฎการสลับที่ควบคุมการทำงานของระบบ โดยการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยต่าง ๆ ซึ่งระบบสลับที่เป็นบวกสามารถถูกประยุกต์ใช้ในหลากหลายบริบท เช่น ด้านชีววิทยา นิเวศวิทยา สิ่งแวดล้อม เศรษฐศาสตร์ และการสื่อสาร เป็นต้น โดยในการศึกษาระบบนี้

จะมุ่งประเด็นไปที่การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ นั่นคือ ศึกษาความสามารถและพฤติกรรมของระบบในการกลับคืนสู่สภาวะปกติเมื่อการรบกวนจากปัจจัยภายนอกยุติลง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (switched positive nonlinear system) ซึ่งเป็นระบบสลับที่มีกระบวนการทำงานที่ซับซ้อน แต่มีความเป็นทั่วไปและประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้มากกว่าระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น (switched positive linear system) ด้วยเหตุนี้ คณะผู้วิจัยจึงได้สนใจจะศึกษาและวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น โดยอาศัยองค์ความรู้และแนวคิดจาก Aleksandrov et al., (2011)

สำหรับกฎของสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลาเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับ ซึ่งมีด้วยกันหลายกฎ เช่น เวลาที่ดีพอ (dwell time) เวลาเฉลี่ยที่ดีพอ (average dwell time) เวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย (mode-dependent dwell time) เวลาเฉลี่ยที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย (mode-dependent average dwell time) เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีหัวข้อที่น่าสนใจในการศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับ นั่นคือ การทำงานของระบบย่อยต่าง ๆ ภายใต้กฎการสลับที่ขึ้นกับเวลาอย่างเหมาะสม ซึ่งสามารถแบ่งการวิเคราะห์ระบบสลับได้เป็น 3 ประเด็น คือ 1) ระบบสลับที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรทุกระบบย่อย 2) ระบบสลับที่ประกอบด้วยระบบย่อยทั้งที่เสถียร และระบบย่อยที่ไม่เสถียร โดยอาศัยหลักการทำงาน คือ ระบบย่อยที่มีเสถียรภาพจะถูกเปิดใช้งานเป็นเวลานานเพียงพอเพื่อชดเชยความแตกต่างของสถานะที่เกิดจากระบบย่อยที่ไม่เสถียร และ 3) ระบบสลับที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด (all unstable subsystems) ซึ่งหลักการทำงานดังกล่าวไม่สามารถใช้ได้ ดังนั้น มันจึงเกิดข้อคำถามขึ้นว่า เราจะออกแบบกฎของสัญญาณการสลับอย่างไรที่จะสามารถควบคุมการทำงานของระบบสลับที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทำงานร่วมกันอยู่ เพื่อให้สถานะของระบบสลับหลักมีความเสถียรภาพตลอดการทำงานของมัน จากคำถามดังกล่าวจึงเป็นแรงบันดาลใจให้คณะผู้วิจัยได้ใช้องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อที่จะสร้างทฤษฎีใหม่ที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอในการยืนยันการมีเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นแม้ว่ามันจะมีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทำงานร่วมกัน ภายใต้การเลือกใช้กฎของสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลาอย่างเหมาะสม โดยจะเริ่มทำการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับหัวข้องานวิจัยนี้ ดังต่อไปนี้ ในงานวิจัยของ Xiang และ Xiao (2014) ได้สร้างทฤษฎีที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อวิเคราะห์การมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotic stability) ของระบบสลับที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอ ต่อมาในงานวิจัยของ Mao et al., (2019) ได้สร้างทฤษฎีที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อวิเคราะห์การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (exponential stability) ของระบบสลับที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยการใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอ อย่างไรก็ตาม ทั้งสองงานวิจัยดังกล่าวไม่ได้ศึกษาระบบที่เป็นบวกและไม่ได้ประยุกต์ใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย สำหรับในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ได้สร้างทฤษฎีที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อวิเคราะห์การมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ทั้งนี้คุณสมบัติที่สำคัญของการเป็นระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรทุกระบบย่อยทำงานร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอ ได้ถูกศึกษาในงานวิจัยของ Zhang et al., (2016) ในขณะทำงานวิจัยของ Dong และ Tian (2024) ได้ศึกษาระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่เสถียรและระบบย่อยที่ไม่เสถียรทำงานร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาเฉลี่ยที่ดีพอ อย่างไรก็ตาม ทั้งสองงานวิจัยดังกล่าวไม่ได้ศึกษาในกรณีที่ทุกระบบย่อยเป็นระบบไม่เสถียรและไม่ได้ประยุกต์ใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย และเมื่อไม่นานนี้ ในงานวิจัยของ Zhang et al., (2025) ได้วิเคราะห์การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังของระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น ซึ่งมีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกันภายใต้การใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอและเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

จากการทบทวนวรรณกรรมทั้งหมดข้างต้น พบว่า ยังไม่มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทุกระบบย่อยทำงานร่วมกันภายใต้การเลือกใช้กฎของสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลาที่ติพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ด้วยเหตุนี้ มันจึงเป็นแรงบันดาลใจให้คณะผู้วิจัยได้จัดทำงานวิจัยในหัวข้อดังกล่าว ซึ่งจะได้สรุปเป็นลำดับข้อดังนี้

1) ศึกษาเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด

2) สร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวก ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา (time-varying) และประยุกต์ใช้กฎการสลับเวลาที่ติพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ซึ่งเป็นกฎการสลับที่มีความเป็นทั่วไปมากกว่ากฎการสลับเวลาที่ติพอ เนื่องจากทุก ๆ ระบบย่อยจะมีเวลาที่ติพอของตัวเองที่จะควบคุมระบบสลับหลักให้สามารถทำงานได้อย่างมีเสถียรภาพ โดยทั้งสองวิธีการดังกล่าวนี้ได้ถูกบูรณาการเพื่อสร้างทฤษฎีใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อรับประกันเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่มีแต่ละระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกัน

3) เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากงานวิจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง พบว่างานวิจัยนี้มีความเป็นทั่วไปมากกว่าผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) กล่าวคือ ผลลัพธ์ทางทฤษฎีใหม่ที่ได้ถูกสร้างขึ้นจากงานวิจัยนี้ครอบคลุมและประยุกต์ใช้ได้กับทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) แต่สำหรับผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 1 ของ Feng et al., (2017) ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับงานวิจัยนี้ อีกทั้งยังได้แสดงผลการวิจัยที่เป็นตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันความถูกต้องและควมมีประสิทธิภาพของการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีที่ได้ถูกสร้างขึ้นจากงานวิจัยนี้

วิธีการดำเนินการวิจัย

สำหรับวิธีการดำเนินการวิจัยของงานวิจัยนี้ เริ่มจากการศึกษาลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น ความเป็นบวกและพฤติกรรมการทำงานของระบบดังกล่าว โดยได้นำเสนอบทนิยามและสมมติฐานที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะนำไปสู่การสร้างทฤษฎีใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อยืนยันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ซึ่งประกอบด้วยทุกระบบย่อยเป็นระบบที่ไม่เสถียร ทั้งนี้ เทคนิคการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวกและการใช้กฎการสลับเวลาที่ติพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อยได้ถูกประยุกต์ใช้ร่วมกันเพื่อสร้างขึ้นเป็นทฤษฎีใหม่ของงานวิจัยนี้

คณะผู้วิจัยได้ศึกษาระบบสลับที่ไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปของ

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} f(x(t)) \quad (1)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

เมื่อ

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$$

เป็นเวกเตอร์สถานะที่ขึ้นกับเวลา t และ

$$f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T \in \mathbb{R}^n$$

เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นของเวกเตอร์สถานะที่ขึ้นกับเวลา t ในขณะที่

$$\sigma(t) : [t_0, +\infty) \rightarrow \underline{N} = \{1, 2, \dots, N\}$$

เป็นฟังก์ชันค่าคงที่แบบแบ่งส่วน (piecewise constant function) ที่ซึ่งกำหนดสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา t โดย t_0 เป็นเวลาเริ่มต้น และ N เป็นจำนวนเต็มบวกที่แสดงถึงจำนวนของระบบย่อย และ $\dot{x}(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเวกเตอร์สถานะ $x(t)$ เทียบกับเวลา t นอกจากนี้ ถ้า $\sigma(t)$ คือระบบย่อยที่ i แล้ว A_i เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นค่าคงที่สำหรับ $i \in \underline{N}$

สำหรับระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ถูกสมมติให้เป็นระบบที่ต่อเนื่องมาจากทางขวาทุกจุดสำหรับลำดับการสลับ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{l-1} < t_l < \dots < +\infty$ เมื่อ $l \in \mathbb{N}_0$ (เซตของจำนวนเต็มบวกที่รวมศูนย์) โดยหลักการทำงานของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) มีกลไกการทำงานคือ เมื่อระบบย่อยที่ $\sigma(t_l)$ หรือระบบย่อยที่ i ถูกเปิดใช้งานเมื่อ $t \in [t_l, t_{l+1})$ และระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) จะสลับจากระบบย่อยที่ $\sigma(t_{l-1})$ หรือระบบย่อยที่ j ไปยังระบบย่อยที่ i โดยที่ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$

บทนิยาม 1 [Zhang et al., (2016)]

ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) จะถูกเรียกว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น ถ้าสำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ แล้วทำให้เวกเตอร์สถานะ $x(t) \succeq 0$ สำหรับทุก $t \geq t_0$

บทนิยาม 2 [Zhang et al., (2016)]

สำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นค่าคงที่ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ จะถูกเรียกว่าเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ (Metzler matrix) ก็ต่อเมื่อสมาชิกนอกแนวทแยงมุมทั้งหมดไม่เป็นลบ

สมมติฐาน 1

สำหรับ $x_p \in \mathbb{R}$ และ $p = 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) สอดคล้อง

$$\varepsilon_1 x_p^2 \leq f_p(x_p) x_p \leq \varepsilon_2 x_p^2$$

เมื่อ $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ และ $f_p(0) = 0$

อย่างไรก็ตาม ผลการศึกษาในงานวิจัยของ Dong และ Tian (2024) พบว่า ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ จะมีความเป็นบวกภายใต้สมมติฐาน 1 ก็ต่อเมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ นอกจากนี้ โดยไม่เสียนัยทางคณิตศาสตร์สามารถอ้างอิงจากสมมติฐาน 1 และ $x_p \geq 0$ ได้ว่า $\varepsilon_1 x_p \leq f_p(x_p) \leq \varepsilon_2 x_p$ สำหรับ $p = 1, 2, \dots, n$ $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ และ $f_p(0) = 0$

บทนิยาม 3 [Xiang และ Xiao (2014)]

สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ภายใต้สมมติฐาน 1 และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ จะเรียกระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ว่าเป็น

- 1) เสถียรแบบเอกรูป (uniformly stable) หรือ (US) ภายใต้ $\sigma(t)$ ใด ๆ ถ้า
 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ ที่ทำให้ $\|x(t)\|_2 < \epsilon, \forall t \in [0, +\infty)$ เมื่อ $\|x_0\|_2 < \delta$
- 2) เสถียรแบบเอกรูปวงกว้าง (global uniformly stable) หรือ (GUS) ภายใต้ $\sigma(t)$ ใด ๆ ถ้า
 $\forall \delta > 0$ ที่ทำให้ $\|x(t)\|_2 < \epsilon, \forall t \in [0, +\infty)$
- 3) เสถียรเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้าง (globally uniformly asymptotically stable) หรือ (GUAS) ภายใต้ $\sigma(t)$ ใด ๆ ถ้าระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็น GUS และ $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

บทนิยาม 4 [Feng et al., (2017)]

สำหรับความยาวระหว่างช่วงเวลาของการสลับต่อเนื่อง ที่ซึ่งระบบย่อยที่ i ถูกเปิดใช้งาน ถ้ามีค่าคงที่ $\tau_{i,l} > 0$ ที่ทำให้ $\tau_{i,l} = t_{l+1} - t_l$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $l \in \mathbb{N}_0$ แล้วค่าคงที่ $\tau_{i,l}$ จะถูกเรียกว่าเป็น เวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย (mode-dependent dwell time) หรือ (MDDT) ของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1)

บทนิยาม 5 [Feng et al., (2017)]

สำหรับระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) กำหนดให้เวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\tau_{i,l} \in [\tau_{i,min}, \tau_{i,max}]$ เมื่อ $\tau_{i,min} = \inf_{l \in \mathbb{N}_0} \tau_{i,l}, \tau_{i,max} = \sup_{l \in \mathbb{N}_0} \tau_{i,l}$ และ $0 < \tau_{i,min} \leq \tau_{i,max}$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $l \in \mathbb{N}_0$ นอกจากนี้ กำหนดให้ $\Xi_{[\tau_{i,min}, \tau_{i,max}]}$ คือ เซตของเทคนิคการสลับทั้งหมดด้วยกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\tau_{i,l} \in [\tau_{i,min}, \tau_{i,max}]$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $l \in \mathbb{N}_0$

สมมติฐาน 2

กำหนดให้ทุกระบบย่อยของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นระบบย่อยที่ไม่เสถียร

เป้าหมายหลักในงานวิจัยนี้คือ การสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ใหม่ที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อที่จะยืนยันการเป็นบวกของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) และการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด โดยการออกแบบสัญญาณการสลับตามกฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ซึ่งจะได้นำเสนอในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

กำหนดให้ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) สอดคล้องกับสมมติฐาน 1 และสมมติฐาน 2 โดยมี A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ $\forall i \in \underline{N}$ และกำหนดให้ค่าคงที่ $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, 0 < \mu_i < 1, 0 < \xi_i, 0 < \tau_{i,min}, \forall i \in \underline{N}$ และ $K \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ถ้ามีเวกเตอร์ที่เป็นบวก $v_{i,q} > 0, \forall i \in \underline{N}, q \in \{0, 1, 2, \dots, K\}$ และถ้ามีค่าคงที่ $\tau_{i,max} \geq \tau_{i,min}, \forall i \in \underline{N}$ ที่ทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left[A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right] v_{i,q} < 0 \quad (3)$$

$$\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left[A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right] v_{i,q+1} \prec 0 \quad (4)$$

$$\left[A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right] v_{i,K} \prec 0 \quad (5)$$

$$v_{i,0} - \mu_i v_{j,K} \prec 0 \quad (6)$$

$$\ln \mu_i + \xi_j \tau_{j,max} < 0 \quad (7)$$

สำหรับทุก $q=0,1,...,K-1$ และ $i,j \in \underline{N}$, $i \neq j$ แล้วระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นบวกและเสถียรเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้าง ภายใต้สัญญาณการสลับตามกฎการสลับเวลาที่ติพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

บทพิสูจน์

จากบทตั้ง 2 ในงานวิจัยของ Zhang et al., (2016) ได้กล่าวว่า ภายใต้คุณสมบัติของการเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (นั่นคือ ภายใต้สมมติฐาน 1) แล้วระบบสลับที่ไม่เชิงเส้นเป็นบวกก็ต่อเมื่อ A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ $\forall i \in \underline{N}$ ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) สอดคล้องกับสมมติฐาน 1 และสมมติฐาน 2 และ A_i เป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ $\forall i \in \underline{N}$ โดยบทตั้ง 2 ในงานวิจัยของ Zhang et al., (2016) จะได้ว่า เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ และสัญญาณการสลับที่ขึ้นกับเวลา $\sigma(t)$ ใด ๆ ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นบวก

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐาน 1 และสมมติฐาน 2 มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้าง ภายใต้สัญญาณการสลับตามกฎการสลับเวลาที่ติพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย โดยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวก

$$V_i(t, x(t)) = x^T(t) v_i(t) \quad (8)$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ เมื่อฟังก์ชันเวกเตอร์ $v_i(t)$, $i \in \underline{N}$ ถูกสร้างโดยกำหนดให้

$$t \in [t_l, t_{l+1}) = [t_l, t_l + \tau_{i,min}) \cup [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1})$$

และ $[t_l, t_l + \tau_{i,min})$ ถูกแบ่งออกเป็น K ส่วน โดยมีความยาวเท่ากัน

$$h_i = \frac{\tau_{i,min}}{K}$$

และ

$$\Omega_{l,q}^i = [t_l + qh_i, t_l + (q+1)h_i)$$

เมื่อ $l \in \mathbb{N}_0$, $t > 0$, $\tau_{i,min} > 0$ สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และฟังก์ชันเวกเตอร์ $v_i(t)$, $i \in \underline{N}$ นิยามโดย

$$v_i(t) = \begin{cases} (1-\gamma(t))v_{i,q} + \gamma(t)v_{i,q+1}, & t \in \Omega_{l,q}^i, q=0,1,\dots,K-1 \\ v_{i,K}, & t \in [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1}) \end{cases}$$

โดยที่ $l \in \mathbb{N}_0$, $\gamma(t) = \frac{t-t_l - qh_i}{h_i}$ ซึ่ง $0 \leq \gamma(t) \leq 1$ และ $v_{i,q}$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นบวก สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และ $q \in \{0,1,2,\dots,K\}$ จากนั้นหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวก (8) เทียบกับเวลา t และจากระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) = x^T(t) \dot{v}_i(t) + f^T(x(t)) A_i^T v_i(t)$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ จากนั้นอาศัยเงื่อนไขของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในสมมติฐาน 1 จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) - \xi_i V_i(t, x(t)) \leq f^T(x(t)) \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \dot{v}_i(t) + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_i(t) \right]$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ จากนั้นเมื่อ $t \in \Omega_{l,q}^i \subset [t_l, t_l + \tau_{i,min})$ จะได้ว่า

$$\dot{v}_i(t) = \frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\tau_{i,min}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1} \dot{v}_i(t) + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_i(t) &= (1-\gamma(t)) \left[\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_{i,q} \right] \\ &\quad + \gamma(t) \left[\frac{(v_{i,q+1} - v_{i,q})K}{\varepsilon_1 \tau_{i,min}} + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_{i,q+1} \right] \end{aligned}$$

สำหรับทุก $i \in \underline{N}$ และสำหรับทุก $q=0,1,\dots,K-1$ จากนั้นใช้เงื่อนไข (3) และเงื่อนไข (4) จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) < \xi_i V_i(t, x(t))$$

สำหรับ $t \in \bigcup_{q=0}^{K-1} \Omega_{l,q}^i = [t_l, t_l + \tau_{i,min})$ จากนั้นเมื่อพิจารณา $t \in [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1})$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \dot{v}_i(t) + \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_i(t) = \left(A_i^T - \frac{\xi_i}{\varepsilon_2} I_n \right) v_{i,K}$$

จากนั้นใช้เงื่อนไข (5) จะได้ว่า

$$\dot{V}_i(t, x(t)) < \xi_i V_i(t, x(t))$$

สำหรับ $t \in [t_l + \tau_{i,min}, t_{l+1})$ ดังนั้น

$$\dot{V}_i(t, x(t)) < \xi_i V_i(t, x(t))$$

สำหรับ $t \in [t_l, t_{l+1})$ เมื่อ $l \in \mathbb{N}_0$ จากนั้นทำการปรับอันดับในช่วง $[t_l, t)$ จะได้ว่า

$$V_i(t, x(t)) < e^{\xi_i(t-t_l)} V_i(t_l, x(t_l)) \quad (9)$$

จากนั้นใช้เงื่อนไข (6) จะได้ว่า

$$v_i(t_l) \prec \mu_i v_j(t_l^-) \quad (10)$$

สำหรับ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$ จากฟังก์ชันไลปูนอฟแบบร่วมบวก (8) และอสมการเวกเตอร์ (10) จะได้ว่า

$$V_i(t_l, x(t_l)) \leq \mu_i V_j(t_l^-, x(t_l^-)) \quad (11)$$

สำหรับ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$ จากนั้นใช้อสมการ (9) และอสมการ (11) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) &< e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} V_{\sigma(t_l)}(t_l, x(t_l)) \\ &\leq \mu_{\sigma(t_l)} e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} V_{\sigma(t_{l-1})}(t_l^-, x(t_l^-)) \\ &< \mu_{\sigma(t_l)} e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} e^{\xi_{\sigma(t_{l-1})}(t_l-t_{l-1})} V_{\sigma(t_{l-1})}(t_{l-1}, x(t_{l-1})) \end{aligned}$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้ว่า

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) \leq e^{\xi_{\sigma(t_l)}(t-t_l)} \left(\prod_{k=0}^{l-1} \mu_{\sigma(t_{k+1})} e^{\xi_{\sigma(t_k)}(t_{k+1}-t_k)} \right) V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0))$$

ดังนั้น

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) \leq e^{\xi_{\sigma(t_l)} \tau_{\sigma(t_l), \max}} \left(\prod_{k=0}^{l-1} \mu_{\sigma(t_{k+1})} e^{\xi_{\sigma(t_k)} \tau_{\sigma(t_k), \max}} \right) V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0))$$

จากนั้นอาศัยเงื่อนไข (7) จะได้ว่า

$$\mu_i e^{\xi_j \tau_{j, \max}} < 1 \quad (12)$$

สำหรับ $i, j \in \underline{N}$ และ $i \neq j$ ดังนั้น

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) < e^{\xi_{\sigma(t_l)} \tau_{\sigma(t_l), \max}} V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0))$$

ต่อจากนั้น กำหนดให้ $X = \max_{i \in \underline{N}} \{\xi_i\}$ และ $T = \max_{i \in \underline{N}} \{\tau_{i, \max}\}$ จะได้ว่า

$$V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) < e^{XT} V_{\sigma(t_0)}(t_0, x(t_0)) \quad (13)$$

และกำหนดให้เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ จากฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวก (8) จะได้ว่า

$$V_{\sigma(0)}(0, x(0)) \leq \sqrt{n} \sum_{\zeta \in \{0,1,2,\dots,K\}} \|v_{\sigma(0),\zeta}\|_2 \|x_0\|_2 \quad (14)$$

และ

$$\varsigma \|x(t)\|_2 \leq V_{\sigma(t_l)}(t, x(t)) \quad (15)$$

เมื่อ $\varsigma = \min_{(a,b) \in \underline{N} \times \{0,1,2,\dots,K\}} \{\omega(v_{a,b})\}$ จากอสมการ (13), (14) และ (15) จะได้ว่า

$$\|x(t)\|_2 \leq \Theta \|x_0\|_2 e^{XT} \quad (16)$$

เมื่อ $\Theta = \frac{\sqrt{n}}{\varsigma} \sum_{\zeta \in \{0,1,2,\dots,K\}} \|v_{\sigma(0),\zeta}\|_2$ สำหรับ $t \geq 0$ ต่อจากนั้น สำหรับทุก $\epsilon > 0$ เราสามารถเลือก

$$\|x_0\|_2 < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\Theta e^{XT}}$$

ดังนั้น

$$\|x(t)\|_2 < \epsilon$$

สำหรับ $t \geq 0$ นั่นคือ ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด มีความเสถียรภาพแบบเอกรูปภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

อย่างไรก็ตาม สำหรับการจะพิสูจน์ว่า $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ จะคล้ายกับการพิสูจน์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ซึ่งจะขอละไว้ ดังนั้น ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย

ผลการวิจัย

เพื่อแสดงให้เห็นว่า ทฤษฎีบท 1 ที่ได้สร้างขึ้นในหัวข้อที่ผ่านมานั้นมีความถูกต้อง นอกจากนี้ คณะผู้วิจัยแสดงตัวอย่างเชิงตัวเลข ดังนี้

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ที่ประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมด คือระบบย่อยที่หนึ่ง

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.06 \\ 0.06 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ระบบย่อยที่สอง

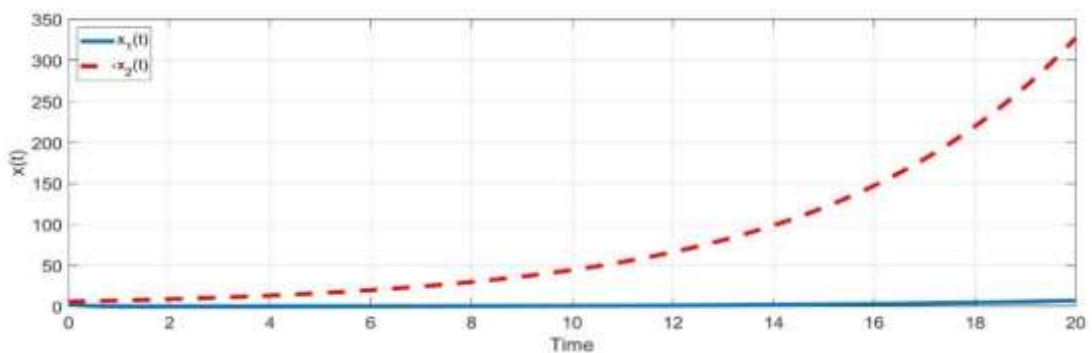
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & -1.5 \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

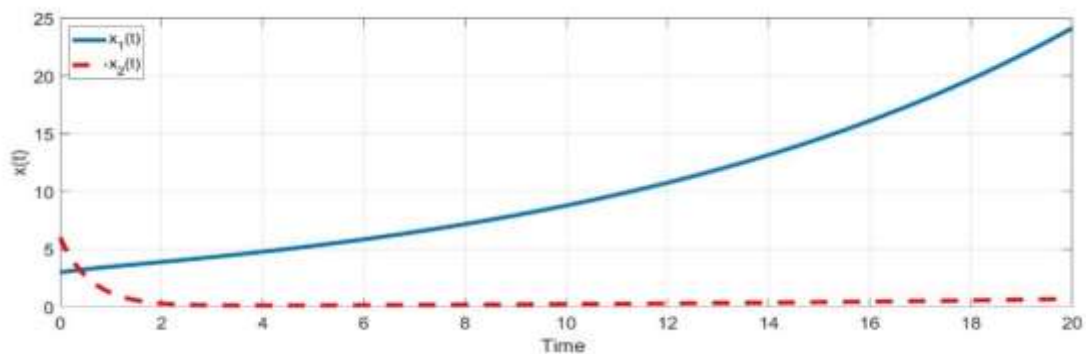
$$f_p(x_p(t)) = x_p(t) + \frac{0.1x_p(t)}{x_p^2(t) + 1}$$

สำหรับ $p=1,2$ จากฟังก์ชันไม่เชิงเส้นข้างต้นและสมมติฐาน 1 เราจะกำหนดให้ $\varepsilon_1=1$ และ $\varepsilon_2=1.1$ นอกจากนี้ จะเห็นได้ชัดว่า ทั้งเมทริกซ์ A_1 และ A_2 ที่ได้ให้ไว้ข้างต้นเป็นเมทริกซ์เมตซ์เลอร์ ดังนั้น ระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อย เป็นระบบที่เป็นบวก

เพื่อที่จะแสดงว่า ทั้งสองระบบย่อยของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) เป็นระบบย่อยที่ไม่เสถียร จึงกำหนดให้ $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์สถานะเริ่มต้นของระบบสลับที่ไม่เชิงเส้น (1) และพิจารณาจากรูปที่ 1 และรูปที่ 2



รูปที่ 1 แสดงแนววิถีสถานะของระบบย่อยที่หนึ่ง



รูปที่ 2 แสดงแนววิถีสถานะของระบบย่อยที่สอง

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 ข้างต้น แสดงให้เห็นว่า เมื่อกำหนดเวกเตอร์สถานะเริ่มต้นดังกล่าว ซึ่งสอดคล้องกับการกำหนดให้เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 \succeq 0$ ใด ๆ แล้วเมื่อเวลาผ่านไปหรือเวลาเพิ่มขึ้น ได้ส่งผลให้แนววิถีสถานะของระบบย่อยที่หนึ่ง (โดยเฉพาะเส้นประสีแดง) และระบบย่อยที่สอง (โดยเฉพาะเส้นทึบสีน้ำเงิน) มีพฤติกรรมลู่ออกอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้น ทั้งระบบย่อยที่หนึ่งและระบบย่อยที่สองเป็นบวกและไม่เสถียร

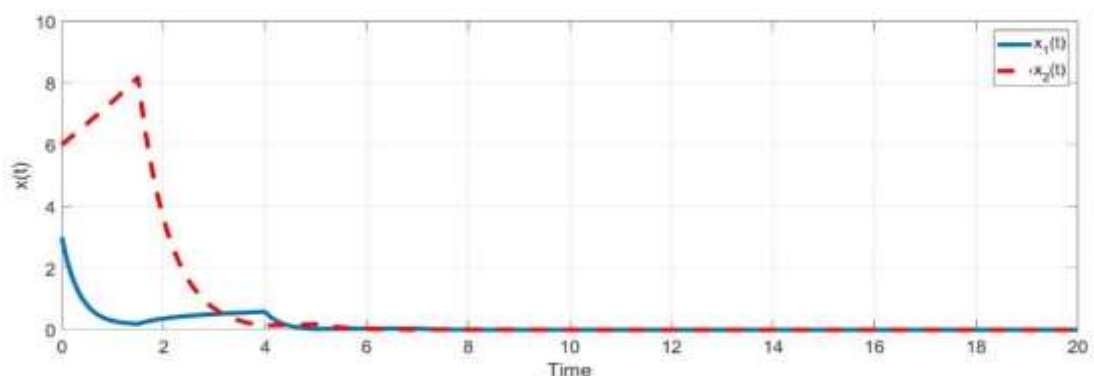
ต่อจากนั้น เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์

$$K = 1, \mu_1 = 0.55, \mu_2 = 0.54, \xi_1 = 0.41, \xi_2 = 0.2, \tau_{1,min} = 1, \tau_{2,min} = 2$$

ซึ่งเป็นการกำหนดค่าพารามิเตอร์เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดในทฤษฎีบท 1 และจะได้ว่ามีเวกเตอร์ที่เป็นบวก

$$v_{1,0} = \begin{bmatrix} 36.6325 \\ 57.0269 \end{bmatrix}, v_{1,1} = \begin{bmatrix} 131.7954 \\ 59.0737 \end{bmatrix}, v_{2,0} = \begin{bmatrix} 70.8586 \\ 31.5394 \end{bmatrix}, v_{2,1} = \begin{bmatrix} 66.6862 \\ 105.1124 \end{bmatrix}$$

และมีค่าคงที่ $\tau_{1,max} = 1.5$ และ $\tau_{2,max} = 2.5$ ที่ทำให้เงื่อนไข (3) – (7) ในทฤษฎีบท 1 เป็นจริงทั้งหมด ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1 จึงสรุปได้ว่า ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย โดยที่ระบบย่อยที่หนึ่ง คือ $\Xi_{[1,1.5]}$ และระบบย่อยที่สอง คือ $\Xi_{[2,2.5]}$ ซึ่งจะเห็นได้ชัดจากรูปที่ 3 ดังนี้



รูปที่ 3 แสดงแนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ทำงานร่วมกันภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย $\Xi_{[1,1.5]}$ และ $\Xi_{[2,2.5]}$

จากรูปที่ 3 แสดงให้เห็นถึงผลลัพธ์เชิงตัวเลขของตัวอย่าง 1 นี้ว่า กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อย โดยที่ระบบย่อยที่หนึ่ง คือ $\Xi_{[1,1.5]}$ และระบบย่อยที่สอง คือ $\Xi_{[2,2.5]}$ แล้วเมื่อเวลาผ่านไปหรือเวลาเพิ่มขึ้น ได้ส่งผลให้แนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) มีพฤติกรรมลู่เข้าอย่างเห็นได้ชัด นั่นคือระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ทำงานร่วมกัน มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อยทั้งสองดังกล่าว ดังนั้น ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของตัวอย่าง 1 สอดคล้องและเป็นไปตามผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยนี้

วิจารณ์ผล

จากผลการวิจัยในตัวอย่าง 1 ข้างต้น โดยเฉพาะรูปที่ 3 พบว่า แนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) เกิดจากการใช้กฎการสลับเวลาที่ดีพอที่ขึ้นอยู่กับแต่ละระบบย่อย โดยที่ระบบย่อยที่หนึ่ง คือ $\Xi_{[1,1.5]}$

และระบบย่อยที่สอง คือ $\Xi_{[2,2.5]}$ กล่าวคือ ระบบย่อยที่หนึ่งจะทำงานในช่วงเวลาต่ำสุดเป็น 1.0 และสูงสุดไม่เกิน 1.5 ในขณะที่ระบบย่อยที่สองจะทำงานในช่วงเวลาต่ำสุดเป็น 2.0 และสูงสุดไม่เกิน 2.5 ซึ่งในตัวอย่าง 1 ข้างต้นนี้ได้เริ่มต้นจากให้ระบบย่อยที่หนึ่งทำงานจนถึงเวลาเป็น 1.5 และได้สลับมาให้ระบบย่อยที่สองทำงานต่อจากระบบย่อยที่หนึ่งจนกระทั่งถึงเวลาเป็น 4.0 และได้สลับกลับไปให้ระบบย่อยที่หนึ่งทำงานต่อ โดยการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยทั้งสองนี้ได้อยู่ภายใต้ช่วงเวลาที่ตีพ็อตที่ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของระบบย่อยดังกล่าวจนกระทั่งสิ้นสุดที่เวลาเป็น 20.0 พบว่า แนววิถีสถานะของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ในตัวอย่าง 1 นี้มีพฤติกรรมลู่เข้าอย่างเห็นได้ชัด อย่างไรก็ตาม ค่าของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวกมีการเพิ่มขึ้นในช่วงเวลาที่แต่ละระบบย่อยทำงาน เนื่องมาจากที่แต่ละระบบย่อยเป็นระบบที่ไม่เสถียร แต่การเพิ่มขึ้นของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวกนี้จะถูกชดเชยโดยกฎการสลับเวลาที่ตีพ็อตที่ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของระบบย่อยที่ได้ถูกออกแบบไว้ดังกล่าวยังข้างต้น ดังนั้น การลดลงของเวกเตอร์สถานะจึงเกิดขึ้นที่จุดเวลาที่มีการสลับการทำงานกันระหว่างระบบย่อยทั้งสอง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (6) ในทฤษฎีบท 1 และอสมการเวกเตอร์ (10) ของบทพิสูจน์ในทฤษฎีบท 1 และท้ายที่สุดค่าของฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวกได้ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อสิ้นสุดเวลา ดังนั้น ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้น (1) ซึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งคู่ทำงานร่วมกัน มีความเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างภายใต้กฎการสลับเวลาที่ตีพ็อตที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อยทั้งสองดังกล่าว ซึ่งผลลัพธ์เชิงตัวเลขของตัวอย่าง 1 สอดคล้องและเป็นไปตามผลลัพธ์ของทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยนี้

นอกจากนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับระบบที่ถูกศึกษาในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ภายใต้กฎการสลับเวลาที่ตีพ็อตที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อยเดียวกัน พบว่า ระบบสลับ (1) ที่ศึกษาในงานวิจัยนี้เป็นระบบไม่เชิงเส้น ในขณะที่ระบบที่พิจารณาในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) เป็นระบบเชิงเส้น และเป็นที่น่าสนใจได้ว่า ทฤษฎีบท 1 ของงานวิจัยนี้ ครอบคลุมทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) กล่าวคือ ถ้ากำหนดให้ค่าคงที่ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ของทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยนี้ แล้วเงื่อนไขทั้งหมด (3) – (7) ของทฤษฎีบท 1 เหมือนกับเงื่อนไขทั้งหมดของทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ดังนั้น ผลลัพธ์ทางทฤษฎีในงานวิจัยนี้จึงมีความเป็นทั่วไปมากกว่าผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดจากตัวอย่างเชิงตัวเลขที่ได้ถูกนำเสนอไว้ในหัวข้อก่อนหน้านี้ นั่นคือ ผลลัพธ์ทางทฤษฎีในงานวิจัยนี้สามารถประยุกต์ใช้ได้กับผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) เพียงกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ของทฤษฎีบท 1 ในงานวิจัยนี้เพื่อให้ระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นกลายเป็นระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น แต่อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับงานวิจัยนี้ เพราะระบบสลับที่ถูกศึกษาในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) เป็นระบบสลับที่เป็นบวกเชิงเส้น จึงไม่สามารถที่จะกำหนดให้มีค่าพารามิเตอร์ของการเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น f ในระบบสลับ (1) ได้

สรุปผล

คณะผู้วิจัยได้ศึกษาเสถียรภาพของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่ซึ่งประกอบด้วยระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกัน โดยอาศัยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟแบบรวมบวกและกฎการสลับเวลาที่ตีพ็อตที่ขึ้นกับแต่ละระบบย่อย ทั้งนี้คณะผู้วิจัยได้นำเสนอทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ใหม่ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอเพื่อยืนยันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบที่ศึกษา และคณะผู้วิจัยได้เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากงานวิจัยของ Feng et al., (2017) พบว่า งานวิจัยนี้มีความเป็นทั่วไปและสามารถประยุกต์ใช้งานได้มากกว่าผลลัพธ์ในงานวิจัยของ Feng et al., (2017) ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดจากตัวอย่างเชิงตัวเลขที่ได้ถูกนำเสนอไว้ในหัวข้อผลการวิจัยและวิจารณ์ผล ดังนั้น ผลลัพธ์ทั้งหมดที่ได้จากงานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันไลปูนอฟแบบ

ร่วมบวกและกฎการสลับที่ได้ถูกนำเสนอสามารถรับประกันการมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแบบเอกรูปวงกว้างของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่มีแต่ระบบย่อยที่ไม่เสถียรทั้งหมดทำงานร่วมกัน และมีความเป็นไปได้มากกว่าวิธีที่มีอยู่ในวรรณกรรมเดิม นอกจากนี้ สำหรับงานวิจัยที่จะทำต่อไปในอนาคตสามารถต่อยอดไปสู่หัวข้อของระบบสลับที่เป็นบวกไม่เชิงเส้นที่มีตัวรบกวน (disturbance) และขยายไปสู่การออกแบบตัวควบคุม (controller) ให้แก่ระบบอีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบูรณ์ ประเภททุนอุดหนุนการวิจัยและพัฒนานวัตกรรม (เงินรายได้ 2568) รหัสโครงการ: 208923 และรหัสข้อเสนอการวิจัย: 68A145000083 การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบสลับด้วยกฎการสลับที่เหมาะสม

เอกสารอ้างอิง

- Aleksandrov, A. Y., Chen, Y., Platonov, A. V., & Zhang, L. (2011). Stability analysis for a class of switched nonlinear systems. *Automatica*, 47(10), 2286-2291.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.016>
- Dong, Y., & Tian, Y. (2024). Stability and L1-gain analysis of switched positive systems with unstable subsystems and sector nonlinearities. *Journal of the Franklin Institute*, 361(18), 107255.
<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.107255>
- Feng, S., Wang, J., & Zhao, J. (2017). Stability and robust stability of switched positive linear systems with all modes unstable. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(1), 167-176.
<https://doi.org/10.1109/JAS.2017.7510718>
- Mao, X., Zhu, H., Chen, W., & Zhang, H. (2019). New results on stability of switched continuous-time systems with all subsystems unstable. *ISA transactions*, 87, 28-33.
<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2018.11.042>
- Xiang, W., Lam, J., & Shen, J. (2017). Stability analysis and L1-gain characterization for switched positive systems under dwell-time constraint. *Automatica*, 85, 1-8.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.07.016>
- Xiang, W., & Xiao, J. (2014). Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching. *Automatica*, 50(3), 940-945.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.12.028>
- Zhang, X., Sun, Y., & Zhu, X. (2025). Analysis of exponential stability and L1-gain performance of positive switched impulsive systems with all unstable subsystems. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 30, 1-19. <https://doi.org/10.15388/namc.2025.30.38319>
- Zhang, J., Zhao, X., & Cai, X. (2016). Absolute exponential L1-gain analysis and synthesis of switched nonlinear positive systems with time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation*, 284, 24-36. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.02.050>