

แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มของจำนวนในทัศนะของสจ๊วต ชาปิโร

กับปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้: กรณีศึกษา i และ $-i$ ¹

Stewart Shapiro on the ante rem structuralism of numbers and The Identity of Indiscernibles:

Case Study i and $-i$

ขวัญตา ทรัพย์สินบุรณะ

Khwanta Sabsinburana

นิสิตระดับปริญญาโท สาขาวิชาปรัชญา คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Master's Student in Philosophy, Faculty of Arts, Chulalongkorn University

[Received: 07/06/2562 Revised: 20/08/2562 Accepted: 25/08/2562]

บทคัดย่อ

แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มของจำนวนในทัศนะของสจ๊วต ชาปิโร พยายามตอบปัญหาทางปรัชญาเกี่ยวกับสถานะความมีอยู่ของจำนวน ชาปิโรได้เสนอมุมมองตำแหน่งสองประเภท ได้แก่ มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ และมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ มีข้อโต้แย้งที่สำคัญประการหนึ่งต่อแนวคิดของชาปิโรคือปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของ i และ $-i$ ซึ่งเสนอโดยเบอร์เจส เฮลล์แมน และเคราเนน อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าชาปิโรจะยังไม่ประสบผลสำเร็จในการตอบข้อโต้แย้งดังกล่าว แต่เมื่อเปรียบเทียบกับแนวคิดที่เป็นจุดเริ่มต้นของโครงสร้างนิยมอย่างแนวคิดของเบนาคเอร์ราฟและแนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต แนวคิดของชาปิโรนั้นน่ายอมรับได้มากกว่า ดังนั้น แนวคิดของชาปิโรจึงยังคงเป็นแนวคิดหนึ่งที่เราสามารถยอมรับได้

Abstract

Stewart Shapiro on the *ante rem structuralism* of numbers tries to answer an philosophical issue about the status of the existence of numbers. He proposes two place perspectives: the places-are-offices perspective and the places-are-objects perspective. There is an important objection for Shapiro's view: the problem of Identity of Indiscernibles, especially in the case study i and $-i$, proposed by Burgess, Hellman and Keränen. Although Shapiro is unable to answer this question, his view is more acceptable than Benacerraf's view, which

¹ บทความนี้เป็นส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาปรัชญา คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เรื่อง แนวคิดของสจ๊วต ชาปิโรเรื่องโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มของจำนวน

is the start of structuralism and traditional Platonism. Therefore, Shapiro's view is still the one notion that we can accept.

1. บทนำ

“ทำไม $1 + 1$ ถึงเท่ากับ 2?”

“จำนวนมีอยู่จริงไหม?”

“จำนวนคืออะไร?”

ฯลฯ

คำถามเหล่านี้เกิดขึ้นกับผู้คนมากมายโดยเฉพาะเด็กๆ รวมถึงตัวผู้เขียนเองเมื่อครั้งยังเยาว์วัยด้วย เราอาจเคยถามกันว่าทำไม $1 + 1$ จึงต้องเท่ากับ 2? ทำไม $1 + 1$ จึงไม่เท่ากับ 3? หรือเท่ากับจำนวนอื่นๆ? อย่างไรก็ตาม เมื่อเราโตขึ้นดูเหมือนคำถามทำนองนี้จะค่อยๆ เลือนหายไป ส่วนหนึ่งอาจเป็นเพราะคำตอบของคำถามดังกล่าวไม่ใช่สิ่งจำเป็นต่อการดำรงชีวิต ไม่เกี่ยวข้องกับปากท้อง หรือไม่ได้ทำให้เงินในกระเป๋าของเราเพิ่มขึ้น ซึ่งคงจะไม่เป็นการกล่าวเกินไปนักถ้าจะบอกว่ามีเพียงแวดวง “ปรัชญาคณิตศาสตร์” เท่านั้นที่ยังคงสนใจคำถามหรือปัญหาเหล่านี้อยู่ เช่นเดียวกับปรัชญาในสาขาอื่นๆ ที่สนใจว่ามโนทัศน์บางมโนทัศน์คืออะไร เช่น ความจริงคืออะไร? ความดีคืออะไร? ความงามคืออะไร? ความรู้คืออะไร? เวลาคืออะไร? ความยุติธรรมคืออะไร? ประชาธิปไตยคืออะไร? ชีวิตที่ดีคืออะไร? เป็นต้น

ผู้เขียนเคยเปรียบเทียบกับนักคณิตศาสตร์นั้นทำงานในลักษณะต่อยอดต้นไม้มิให้ผลิดอกออกผล กล่าวคือ ยังมีการค้นพบทฤษฎีใหม่ๆ หรือตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้เท่าใดก็ยังทำให้ต้นไม้นั้นเจริญงอกงามไปได้เรื่อยๆ ในขณะที่นักปรัชญาคณิตศาสตร์ทำหน้าที่ในการตรวจสอบรากของต้นไม้วามั่นคงแข็งแรงดีหรือไม่ ซึ่งหากมีความผิดปกติเกิดขึ้นที่ราก ก็หาวิธีทำความเข้าใจและค้นหาหนทางเยียวยารักษา แต่ถ้ารากฐานนั้นอ่อนแออ่อนแรง ก็อาจจะเป็นสาเหตุให้ต้นไม้มิทั้งต้นล้มครืนลงมาได้เช่นกัน

หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษากล่าวว่าแนวคิดเรื่องจำนวนเกิดจากความจำเป็นของมนุษย์ในการสื่อสารเพื่อบอกปริมาณว่ามีมากหรือน้อย และจำนวนเป็นสิ่งที่นามธรรมที่มนุษย์ทุกชาติทุกภาษามีความเข้าใจที่ตรงกัน แต่มีการใช้ภาษาเพื่อบอกจำนวนเดียวกันแตกต่างกันออกไป เช่น เมื่อมีดอกไม้วางเรียงกันสองดอก ภาษาไทยจะใช้คำว่าสอง และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ๒ ภาษาอังกฤษใช้คำว่า two และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 2 ในขณะที่ภาษาจีนจะใช้คำว่า 二 (เอ๋อ) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 二 โดย

สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนจำนวน เราจะเรียกว่าตัวเลข (numeral)² ดังนั้น จำนวนจึงไม่ใช่ตัวเลข คำถามที่ว่าจำนวนคืออะไร? จึงไม่เหมือนกับคำถามที่ว่าตัวเลขคืออะไร? เราอาจตอบคำถามหลังได้ง่ายๆ ว่าตัวเลขก็คือสัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนจำนวน ในขณะที่คำถามแรกนั้นไม่ง่ายนักที่จะตอบและให้เหตุผลที่ดีเพียงพอ

นักปรัชญาต่างก็พยายามค้นหาคำตอบว่าจำนวนคืออะไร? มานานกว่าสองพันปีแล้ว อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนจะไม่ย้อนไปไกลและจะกล่าวถึงพอสังเขปเกี่ยวกับสำนักคิดต่างๆ สามสำนักคิดในช่วงศตวรรษที่ 19 ในยุคนั้นเราถือว่ามีนักปรัชญาคณิตศาสตร์และนักคณิตศาสตร์คนสำคัญๆ เกิดขึ้นหลายคน³

สำนักคิดที่โดดเด่นมากสำนักหนึ่งคือตรรกนิยม (Logicism) นักปรัชญาคนสำคัญ ได้แก่ กอทท์ลอบ เฟรเก้ (Gottlob Frege) และเบอร์ทรันด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russell) ถ้าจะกล่าวถึงสถานะทางภววิทยาของจำนวน เฟรเก้ถือได้ว่ามีทัศนะแบบสัจนิยมทางภววิทยา กล่าวคือ เฟรเก้มองว่าจำนวนคือวัตถุทางตรรกะ (logical object) ชนิดหนึ่ง แตกต่างจากรัสเซลล์ที่ไม่ได้มองว่าจำนวนคือวัตถุ อย่างไรก็ตาม สิ่งที่นักปรัชญาทั้งสองคนมีเหมือนกันคือแนวคิดที่ว่าคณิตศาสตร์สามารถลดทอนลงไปสู่ตรรกศาสตร์ได้

เฟรเก้ใช้มโนทัศน์ “ส่วนขยาย” (extension) ในการอธิบายจำนวน กล่าวคือ “จำนวนของ F คือ y” เมื่อ F แทนภาคแสดงอย่าง “ดวงจันทร์ของดาวพฤหัสบดี” หรือ “การ์ตูนบ๊อบบี้” อย่างไรก็ตาม การใช้มโนทัศน์ส่วนขยายไม่เป็นเกณฑ์ที่ครอบคลุมเพียงพอ เนื่องจากมีตัวอย่างค้านที่ว่า “จูเลียส ซีซาร์ = 2” ซึ่งไปด้วยกันได้กับมโนทัศน์ส่วนขยายของเฟรเก้ แต่ไม่น่าจะเรียกว่าเป็นข้อความที่จริง เราเรียกปัญหาดังกล่าวว่าปัญหาซีซาร์ (Caesar problem) เฟรเก้ตระหนักถึงปัญหาดังกล่าวเป็นอย่างดี ในเวลาต่อมาจึงได้พัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับมโนทัศน์และส่วนขยายของมโนทัศน์ที่เรียกว่า “กฎพื้นฐาน V” (Basic Law V) แต่ก็ไม่ประสบความสำเร็จ เนื่องจากมีข้อโต้แย้งจากรัสเซลล์ว่ากฎพื้นฐาน V มีลักษณะไม่คงเส้นคงวา (inconsistent) และมีความขัดแย้งในตัวเอง ในภายหลังเราเรียกความขัดแย้งนี้ว่า “ปริศนาของรัสเซลล์” (Russell's paradox)

ในขณะที่เดียวกันรัสเซลล์ก็ได้พยายามที่จะลดทอนคณิตศาสตร์ลงสู่ตรรกศาสตร์ด้วยวิธีอื่น เขาพบว่านิยามแบบอิมเพดิเคทีฟ (impredicative) ก่อให้เกิดปัญหาการวนกลับในตัวเองอย่างไม่มีที่สิ้นสุด (circular) และจากการที่ปริศนาของรัสเซลล์ส่งผลกระทบต่อทฤษฎีเซต ทำให้รัสเซลล์สรุปว่าไม่มีชั้น (class) ที่รวมเอาทุกๆ ชั้นที่มีอยู่ไว้ด้วยกัน และไม่มีชั้นของทุกชั้นที่ไม่ได้มีตัวเองเป็นสมาชิก รัสเซลล์ได้เสนอทฤษฎีแบบชนิด (type theory) ขึ้นมา โดยอธิบายว่าจำนวนคือทุกสิ่งที่เป็นจำนวนของบางชั้น อย่างไรก็ตาม ทฤษฎี

² สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมสวัสดิการและสวัสดิภาพครูและบุคลากรทางการศึกษา ลาตพรวัว, 2552), 59.

³ Leon Horsten. “Philosophy of Mathematics,” Stanford Encyclopedia of Philosophy. <https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics> (accessed September 26, 2017).

ดังกล่าวประกอบด้วยสัจพจน์ที่ไม่สามารถถูกพิสูจน์ได้และไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือไม่ เราจึงไม่อาจเรียกสัจพจน์นั้นว่าเป็นหลักการทางตรรกศาสตร์ (logical principle) ได้ ดังนั้น ความพยายามที่จะลดทอนคณิตศาสตร์ลงไปสู่ตรรกศาสตร์จึงยังไม่ประสบผลสำเร็จอีกครั้ง

สำนักคิดต่อมาคือรูปแบบนิยม (Formalism) นักปรัชญาที่ถือว่าเป็นตัวแทนของสำนักคิดนี้ ได้แก่ เดวิด ฮิลเบิร์ต (David Hilbert) รูปแบบนิยมเป็นทัศนะที่มองว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่สิ่งอื่นใดนอกจากระบบของสัญลักษณ์ที่เป็นระเบียบแบบแผนและจำนวนก็คือสัญลักษณ์ (symbol) ในระบบนั้น ความรู้ทางคณิตศาสตร์คือความรู้ที่ว่าสัญลักษณ์แต่ละตัวมีความสัมพันธ์กับสัญลักษณ์อื่น ๆ อย่างไร โดยสิ่งที่สำคัญสำหรับทัศนะรูปแบบนิยมก็คือระบบของสัญลักษณ์ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่ามีความคงเส้นคงวา (consistency) อย่างไรก็ดี ทฤษฎีบทความไม่สมบูรณ์ของเกอเดล (Gödel's incompleteness theorem) ก็ได้เข้ามาสั่นคลอนสำนักคิดรูปแบบนิยมอยู่ไม่น้อย เนื่องจากทฤษฎีบทดังกล่าวยืนยันว่ามีระบบบางระบบในคณิตศาสตร์ที่มีอยู่จริง แต่เราไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าระบบนั้นมีความคงเส้นคงวาหรือไม่

สำนักคิดสุดท้ายคือสหัชญาณนิยม (Intuitionism) ซึ่งมีนักปรัชญาคนสำคัญ ได้แก่ แอล. อี. เจ. บราวเวอร์ (L. E. J. Brouwer) และไมเคิล ดัมเมทท์ (Michael Dummett) สหัชญาณนิยมเสนอว่าคณิตศาสตร์เป็นบางสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น จำนวนไม่ใช่สิ่งใดนอกจากการสร้างขึ้นของจิต (mental constructions) หรือเป็นผลจากสิ่งที่จิตของเราสร้างขึ้น จำนวนหรือวัตถุทางคณิตศาสตร์จะถูกสร้างขึ้นก่อน จากนั้นจึงจะสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์หรือทำการพิสูจน์ต่อไปได้ ในทัศนะสหัชญาณนิยมนั้น กฎบางกฎในตรรกวิทยาแบบดั้งเดิม (classical logic) จะถือว่าไม่สมเหตุสมผล เช่น กฎไม่มีค่ากลาง (the law of excluded middle) เป็นต้น และด้วยเหตุที่ว่าจำนวนเป็นสิ่งที่จิตสร้างขึ้น สหัชญาณนิยมจึงไม่ประสบปัญหาทางญาณวิทยาที่ว่าเราจะสามารถเข้าถึงความรู้เกี่ยวกับจำนวนได้อย่างไร แต่ในทางกลับกัน ปัญหาทางอภิปรัชญาที่ว่าอะไรคือสถานะความมีอยู่ของจำนวนก็ยังคงเป็นความท้าทายที่ตอบได้ไม่ถนัดนัก นอกจากนี้ถ้าจำนวนเป็นเพียงแค่สิ่งที่จิตสร้างขึ้นแล้ว เหตุใดความรู้เกี่ยวกับจำนวนจึงสามารถนำไปใช้ในโลกรได้จริงและมีความแม่นยำสูง

ทั้งสามสำนักคิดที่กล่าวมาจัดว่าเป็นคู่ตรงข้ามของทัศนะสัจนิยม (non-realism or non-platonism) ในช่วงเวลานั้นประเด็นเกี่ยวกับสถานะทางภววิทยาของจำนวนดูเหมือนว่าจะไม่ได้รับความสนใจเท่าที่ควร นักคณิตศาสตร์และนักปรัชญาคณิตศาสตร์ต่างก็มุ่งความสนใจไปที่ความพยายามที่จะลดทอนคณิตศาสตร์ลงไปสู่ตรรกศาสตร์ (logic) หรือทฤษฎีเซต (set theory) โดยแนวคิดที่ว่าจำนวนธรรมชาติสามารถลดทอนลงไปที่ทฤษฎีเซตได้ถือเป็นแนวคิดที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย ในแง่หนึ่งแนวคิดดังกล่าวสอดคล้องกับทัศนะสัจนิยม (realism) ซึ่งเป็นทัศนะที่ค่อนข้างกว้างและครอบคลุมแนวคิดของนักปรัชญาหลายคน หนึ่งในนั้นก็คือแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนท์ เร็มของสจ๊วต ชาปิโร

บทความฉบับนี้จะแสดงให้เห็นว่าแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มในทัศนะของซาปิโรมีเหตุผลสนับสนุนที่ดีกว่าแนวคิดซึ่งถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นอย่างแนวคิดของเบนนาเซอร์ราฟและแนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต นอกจากนี้จะอธิบายปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของ i และ $-i$ ที่เสนอโดยนักปรัชญาหลายคน ซึ่งมุ่งทำให้แนวคิดของซาปิโรมีข้อบกพร่องต่อจากนั้นก็อธิบายวิธีตอบปัญหาของซาปิโรที่พยายามจะปกป้องแนวคิดของเขาเอาไว้ ในท้ายที่สุดจะให้ข้อประเมินบางประการของผู้เขียนและบทสรุป

2. แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มของจำนวนในทัศนะของสจ๊วต ซาปิโร

2.1 จุดเริ่มต้นของแนวคิดโครงสร้างนิยม: ข้อโต้แย้งของพอล เบนนาเซอร์ราฟ

ปี ค.ศ. 1965 พอล เบนนาเซอร์ราฟ (Paul Benacerraf) ได้เสนอข้อโต้แย้งที่เรียกว่า “ปัญหาการระบุเอกลักษณ์ของเบนนาเซอร์ราฟ” (Benacerraf's Identification problem)⁴ ดังนี้

ถ้าจำนวนคือเซตแล้ว จำนวนก็ต้องเป็นเซตเฉพาะเซตใดเซตหนึ่ง เนื่องจากเซตแต่ละเซตต่างก็เป็นเซตเฉพาะ แต่เนื่องจากเราสามารถลดทอนจำนวนใดๆ เป็นต้นว่าจำนวน 3 ได้อย่างน้อย 2 วิธี ได้แก่

วิธีที่หนึ่ง (การนิยามแบบเซตเมโล): $\{\{\emptyset\}\}$

วิธีที่สอง (การนิยามแบบนอยมันน์): $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ซึ่งถ้าจำนวน 3 ต้องเป็นเซตใดเซตหนึ่งมากกว่าเซตอื่นแล้ว ก็เป็นไปได้ที่เราจะให้เหตุผลที่น่าเชื่อได้ว่า จะต้องเป็นเซตนั้น อย่างไรก็ดี ไม่มีวิธีใดเลยที่จะเชื่อมโยงได้ว่าเซตใดควรที่จะถูกเลือกกว่าเป็นจำนวน 3 มากไปกว่าเซตอื่นๆ ดังนั้น จำนวนจึงไม่ใช่เซต และในท้ายที่สุดเบนนาเซอร์ราฟจึงสรุปว่าจำนวนไม่ใช่วัตถุ ข้อสรุปของเบนนาเซอร์ราฟนำไปสู่ทัศนะอีกทัศนะหนึ่งคือนามนิยม (nominalism)

เหตุผลที่เบนนาเซอร์ราฟเสนอนั้นก็เป็นจุดเริ่มต้นของแนวคิดโครงสร้างนิยมด้วยเช่นกัน เขากล่าวว่าในการที่จะระบุคุณสมบัติของจำนวน เราเพียงแต่อธิบายคุณลักษณะ (characterize) ของโครงสร้างนามธรรม (abstract structure) ขึ้นมาโครงสร้างหนึ่ง หลังจากนั้นเราก็จะสังเกตว่าองค์ประกอบ (elements) ในโครงสร้างดังกล่าวไม่มีคุณสมบัติอื่นใดมากไปกว่าความสัมพันธ์ที่องค์ประกอบนั้นมีต่อองค์ประกอบอื่นในโครงสร้างเดียวกัน⁵ กล่าวคือ จำนวน 3 ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าการมีตัวก่อนหน้าเป็น 2, 1 และ 0 และการมีตัวถัดไปเป็น 4, 5 และต่อไปเรื่อยๆ เขากล่าวต่อไปว่าวัตถุใดก็สามารถแสดงบทบาทเป็นจำนวน 3 ได้ทั้งสิ้น ไม่ว่าจะเป็น $\{\{\emptyset\}\}$ หรือ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ นั่นคือ วัตถุใดก็สามารถเป็นองค์ประกอบลำดับที่สาม (the third

⁴ Paul Benacerraf, "What Number Could not Be," *Philosophical Review* 74, (1965): 56.

⁵ Paul Benacerraf, "What Number Could not Be," 70

element) ในลำดับที่เคลื่อนไปข้างหน้า (progression) ได้ และจำนวนอื่นๆ นอกเหนือจาก 3 เราก็สามารถระบุคุณสมบัติเช่นนี้ได้ในการทำงานเดียวกัน

สิ่งที่สำคัญต่อการเป็นจำนวนธรรมชาติสำหรับเบนนาเซอร์ราฟนั้นไม่ใช้การเป็นสมาชิกของเซตนั้นๆ หากแต่เป็น “โครงสร้าง” (structure) ที่สมาชิกแต่ละตัวดำรงอยู่ และเพียงเพราะว่าเราไม่สามารถระบุเอกลักษณ์ (identify) ระหว่างจำนวนเชิงปัจเจก (individual number) ใดๆ กับวัตถุเฉพาะชนิดใดชนิดหนึ่งไปมากกว่าวัตถุชนิดอื่นๆ ได้ จำนวนจึงไม่ใช่วัตถุในทัศนะของเบนนาเซอร์ราฟ

กล่าวโดยสรุปก็คือจำนวนแต่ละจำนวนสามารถที่จะแยกออกจากกันได้ด้วยคุณลักษณะที่เป็นความสัมพันธ์ภายในโครงสร้าง (intra-structural relational properties) การพูดถึงจำนวนเชิงปัจเจกแต่เพียงอย่างเดียวโดยปราศจากการอ้างอิงถึงโครงสร้างของจำนวนนั้นจะไร้ความหมาย (nonsense) โครงสร้างนิยมจึงเริ่มต้นมาจากจุดนี้เอง ผู้เขียนมองว่าเบนนาเซอร์ราฟด่วนสรุปเกินไปที่ยืนยันว่าจำนวนไม่ใช่วัตถุ เนื่องจากเรายังสามารถตั้งคำถามได้ต่อไปว่าจะยังคงรักษาสถานภาพความเป็นวัตถุของจำนวนได้อยู่หรือไม่ โดยพิจารณาว่าโครงสร้างในตัวเองนั้นเป็นระบบจำนวน (number system) และตำแหน่ง (places) ซึ่งเป็นองค์ประกอบในโครงสร้างนั่นเองที่เป็นจำนวน นักโครงสร้างนิยมตั้งคำถามเหล่านี้และเสนอความคิดของพวกเขาออกมาเป็นแนวคิดใหม่ที่เรียกว่าโครงสร้างนิยม (structuralism)

2.2 โครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มในทัศนะของซาปิโร vs. สัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต

เมื่อเปรียบเทียบกับแนวคิดสัจนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต (Platonism)⁶ เราจะพบว่าแนวคิดของซาปิโรนั้นคล้ายคลึงกับแนวคิดของเพลโตบางส่วน ได้แก่ ความเป็นสัจนิยมทางภววิทยาและค่าความจริง และความเป็นอิสระจากกันของจำนวนธรรมชาติกับนักคณิตศาสตร์ จำนวนในทัศนะของทั้งคู่ต่างก็เป็น “วัตถุ” ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ซาปิโรไม่ได้พูดอะไรที่เป็นการสนับสนุนความคล้ายคลึงกันดังกล่าวไปมากกว่าการบอกว่าเพียงแค่การให้รายการ (list) ตัวอย่างของสิ่งๆ หนึ่งไม่สามารถทำให้เราพรรณนา (delineate) เกี่ยวกับความคิดทางปรัชญา (philosophical notion) ของสิ่งๆ นั้นได้⁷ กล่าวคือ การให้รายการตัวอย่างของจำนวนธรรมชาติอย่าง 1, 2, 3, ... ไม่ทำให้เราตอบได้ว่า “จำนวนธรรมชาติ” มีอยู่จริงหรือไม่? ซึ่งถ้ามีอยู่จริงแล้ว จะมีอยู่ในแง่ใด? และจำนวนธรรมชาติเป็นวัตถุหรือไม่?

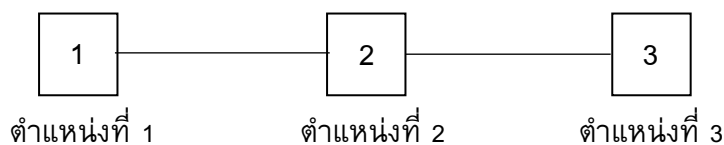
⁶ คำว่า “สัจนิยม” ภาษาอังกฤษใช้คำว่า “realism” หรือ “platonism” คำหลังมีความหมายที่แตกต่างจากคำว่า “Platonism” ที่ใช้ P ตัวพิมพ์ใหญ่ เนื่องจาก “platonism” หมายถึงสัจนิยมโดยทั่วไป ส่วนคำว่า “Platonism” หมายถึงสัจนิยมในทัศนะของเพลโต (Plato)

⁷ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (New York: Oxford University Press, 1997), 73.

อย่างไรก็ตาม ส่วนที่แตกต่างกันก็มีไม่น้อย เมื่อพูดถึงจำนวนธรรมชาติ (natural number) เพลโตกำลังพูดถึงวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่จริงอย่างเป็นอิสระจากนักคณิตศาสตร์และวัตถุเหล่านั้นต่างก็เป็นอิสระจากกันด้วย จำนวนที่มีอยู่จริงอย่างจำเป็น และเราไม่สามารถพูดได้ว่า 2 มีอยู่จริงโดยปราศจาก 6 (ถึงแม้ว่าความเป็นอิสระจากกันของ 2 กับ 6 จะมีผู้สนับสนุนว่าเป็นไปในการทำนองเดียวกับการที่ลูกบอลชายหาดสีแดงเป็นอิสระจากลูกบอลชายหาดสีฟ้าก็ตาม) สารัตถะ (essence) ของจำนวนธรรมชาติใดก็คือจำนวนธรรมชาตินั่นเองในฐานะปัจเจกวัตถุ และไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนธรรมชาติอื่น⁸ เรากล่าวถึงสารัตถะของจำนวนแต่ละจำนวนได้โดยปราศจากการกล่าวถึงจำนวนอื่น เช่น ในการกล่าวถึงสารัตถะของ 2 เราสามารถทำได้โดยปราศจากการกล่าวถึง 1 และ 3 อย่างไรก็ดี จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนจะต้องมีอยู่จริงอย่างจำเป็นด้วยตัวมันเอง ดังนั้น จำนวนธรรมชาติทุก ๆ จำนวนจึงต้องมีอยู่จริงพร้อมกัน

ทัศนะโครงสร้างนิยมแบบเอนแท์ เริ่มของชาปิโรค่อนข้างจะแตกต่างออกไป โครงสร้างในทัศนะของชาปิโรนั้นไม่ได้มีเพียงโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ (natural number structure) เท่านั้น แต่มีอีกหลายๆ โครงสร้างด้วยกัน อาทิ โครงสร้างของจำนวนจริง (real number structure) โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน (complex number structure) โครงสร้างของพื้นที่แบบยูคลิด (Euclidean space structure) เป็นต้น โดยที่ในแต่ละโครงสร้างจะมีระบบหลายๆ ระบบที่เป็นตัวอย่างของโครงสร้างนั้นได้ เช่น ระบบของเซอร์โมไลและระบบของนอยมันน์ ซึ่งเป็นตัวอย่างของโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ เป็นต้น เมื่อใดก็ตามที่ชาปิโรพูดถึงจำนวนธรรมชาติ เขากำลังพูดถึงบางสิ่งบางอย่างเกี่ยวกับโครงสร้างของจำนวนธรรมชาตินั่นเอง

ถ้าอธิบายว่าสารัตถะของจำนวนธรรมชาติในทัศนะของเพลโตคือจำนวนธรรมชาตินั้นในตัวมันเองแล้ว สารัตถะของจำนวนธรรมชาติในทัศนะของชาปิโรก็คือความสัมพันธ์ (relations) ที่จำนวนธรรมชาตินั้นมีต่อจำนวนธรรมชาติอื่น⁹ ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่าสารัตถะของจำนวน 2 ไม่ใช่สิ่งใดมากไปกว่าการเป็นตำแหน่งที่ 2 ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ (หรือเป็นตำแหน่งที่ 3 เมื่อกำหนดให้จำนวนเริ่มต้นคือจำนวน 0) ตำแหน่งที่ 2 เป็นตำแหน่งที่อยู่ถัดจากตำแหน่งที่ 1 และอยู่ก่อนหน้าตำแหน่งที่ 3 (ดังแผนภาพ) ดังนั้น จึงไม่มีจำนวนธรรมชาติใดเลยที่มีอยู่โดยไม่อ้างอิงถึงความสัมพันธ์ที่มีต่อจำนวนธรรมชาติอื่นๆ



⁸ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 72

⁹ Stewart Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press, 2000), 258.

โครงสร้าง (structures) มีอยู่จริงและมีอยู่อย่างเป็นอิสระจากระบบใดๆ ที่เป็นตัวอย่าง (exemplify) ของโครงสร้าง ซาปิโรกล่าวว่สาระสำคัญ (subject matter) ของเลขคณิตคือโครงสร้างเดี่ยวๆ ที่เป็นนามธรรม (single abstract structure) ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวเป็นรูปแบบร่วมของการรวบรวมอย่างเป็นอนันต์หรือระบบของวัตถุ (infinite collection or system of object) และสอดคล้องกับความสัมพันธ์การเป็นตัวถัดไป (successor relation) ซึ่งประกอบด้วยวัตถุเริ่มต้นเพียงหนึ่งเดียว (unique initial object) เท่านั้น และสอดคล้องกับหลักการอุปนัยของตรรกศาสตร์ลำดับที่สอง (second-order induction principle)¹⁰

โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติเป็นรูปแบบร่วมของการรวบรวมหรือระบบของวัตถุ อาทิ

- การรวบรวมของเลขไทย : ๑, ๒, ๓, ...
- การรวบรวมของเลขโรมัน : I, II, III, ...
- การรวบรวมของเซตไมโล : $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, ...
- การรวบรวมของนอยมันน์ : $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$, ...

นอกจากนี้ซาปิโรยังได้ยืนยันความมีอยู่จริงของโครงสร้างด้วยการบอกว่าไม่ว่าโครงสร้างดังกล่าวจะมีการรวบรวมหรือระบบของวัตถุที่สอดคล้องกับโครงสร้างนั้นหรือไม่ ก็ไม่กระทบต่อการมีอยู่จริงของโครงสร้างดังกล่าวแต่อย่างใด กล่าวคือ โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติมีอยู่จริงเสมอ แม้ว่าการรวบรวมของเลขไทย เลขโรมัน เซตไมโล และนอยมันน์ จะหายไปก็ตาม และสิ่งที่ทำให้แนวคิดของซาปิโรต่างจากแนวคิดของเพลโตมากขึ้นก็คือ การที่สาระสำคัญของคณิตศาสตร์ในทัศนะของเพลโตนั้นไม่ใช่ “โครงสร้าง” หากแต่เป็น “การรวบรวมของวัตถุ” ซึ่งสอดคล้องกับวิธีอธิบายแก่นสารสาระของจำนวนธรรมชาติในทัศนะของเพลโตที่ได้กล่าวไปแล้ว

ผู้เขียนได้พิจารณาวิเคราะห์เปรียบเทียบแนวคิดของเพลโตกับแนวคิดของซาปิโรไว้พอสมควร เห็นได้ชัดว่าทัศนะของเพลโตนั้นยอมรับอะไรไว้ก่อนค่อนข้างมาก ขนาดที่ว่าจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวนจะต้องมีอยู่จริงอย่างจำเป็นด้วยตัวมันเอง ภววิทยาของเพลโตจึงน่าจะกว้างใหญ่ยิ่งกว่าเป็นอนันต์ ไม่เช่นนั้นจะไม่สามารถรองรับการมีอยู่ของวัตถุทางคณิตศาสตร์ดังเช่นจำนวนธรรมชาติ ซึ่งมีอยู่อย่างมากมายมหาศาลได้ ในขณะที่ทัศนะของซาปิโรยอมรับเพียงการมีอยู่ของโครงสร้างเดี่ยวที่เป็นนามธรรมเท่านั้น โดยการรวบรวมของวัตถุจะตามมาภายหลังจากการมีอยู่ของโครงสร้างดังกล่าว ด้วยเหตุนี้เอง การมีอยู่ของจำนวนในทัศนะของซาปิโรจึงเป็นไปได้ และดูเหมือนว่าการยอมรับบางสิ่งไว้น้อยกว่า (ทัศนะของซาปิโร) น่าเชื่อถือได้มากกว่าการยอมรับบางสิ่งไว้มากกว่า (ทัศนะของเพลโต)

¹⁰ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* (New York: Oxford University Press, 1997), 72.

ผู้เขียนได้พยายามแสดงให้เห็นว่าแนวคิดสัญนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโตและแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เร็มของซาปิโรมีความเหมือนและความแตกต่างกันในประเด็นใดบ้าง อย่างไรก็ตาม มีข้อโต้แย้งว่าหากซาปิโรไม่สามารถตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้อย่างน่าพึงพอใจ แนวคิดของซาปิโรก็จะไม่แตกต่างไปจากแนวคิดของเพลโต (โปรดดูรายละเอียดในหัวข้อที่ 3 และ 4)

นอกจากปัญหาการระบุเอกลักษณ์ของเบนนาเซอร์ราฟแล้ว แนวคิดของซาปิโรยังสามารถแก้ปัญหาทางปรัชญาได้อีกปัญหาหนึ่งคือปัญหาซีซาร์ เฟรเก้ต้องการเกณฑ์ที่จะใช้ตัดสินว่าจำนวนบางจำนวนอย่างจำนวน 2 นั้นเหมือนหรือแตกต่างจากวัตถุอื่นอย่างจูเลียส ซีซาร์¹¹ โดยที่ข้อความดังกล่าวนั้นเราไม่สามารถหาคำความจริงได้ เนื่องจากมีความเป็นไปได้ที่จะมีข้อความอย่างเช่น “จูเลียส ซีซาร์ = 2” ซาปิโรได้เสนอทางออกให้กับปัญหาซีซาร์ว่าคำถามดังเช่น “จูเลียส ซีซาร์ = 2” หรือไม่? นั้นเป็นคำถามที่ไม่ต้องการคำตอบหรือไม่มีคำตอบที่รอให้เราค้นพบ¹² เนื่องจากจำนวนคือตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ โครงสร้างดังกล่าวเป็นรูปแบบร่วมของทุกๆ แบบ (model) ในเลขคณิต เราจึงสามารถสร้างข้อความเอกลักษณ์ดังเช่น $1 = 1$ และ $1 \neq 4$ ได้ หรือข้อความอื่นในภาษาเลขคณิต เช่น 7 เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 10 เราก็สามารถสร้างได้เช่นกัน ในทางกลับกัน มันดูไม่เข้าที่ (makes no sense) ที่จะสร้างข้อความเอกลักษณ์ระหว่างตำแหน่งในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ (จำนวน 2) กับวัตถุอื่นๆ (จูเลียส ซีซาร์) เนื่องจากเอกลักษณ์ระหว่างจำนวนธรรมชาติด้วยกันนั้นได้ถูกกำหนดไว้แล้ว (determinate) แต่เอกลักษณ์ระหว่างจำนวนธรรมชาติกับวัตถุประเภทอื่นไม่ได้ถูกกำหนดไว้

2.3 มุมมองตำแหน่งสองประเภทในทัศนะของซาปิโร

เมื่อย้อนกลับมาที่คำถามสำคัญที่ว่า “จำนวนคืออะไร?” ในทัศนะของซาปิโร จำนวนคือ

- 1) ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างของจำนวน โครงสร้างดังกล่าวมีความเป็นนามธรรมและมีเพียงหนึ่งเดียว¹³ นอกจากนี้ยังเป็นรูปแบบร่วมของการรวบรวมของวัตถุ เช่น การรวบรวมของเลขไทย การรวบรวมของเลขโรมัน การรวบรวมของเซอร์เมโล การรวบรวมของนอยมันน์ เป็นต้น
- 2) วัตถุและเป็นวัตถุที่จริงแท้ (bona fide object) ในตัวของมันเอง

¹¹ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 78.

¹² Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 79.

¹³ โครงสร้างชนิดใดชนิดหนึ่งจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น เช่น โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติมีเพียงหนึ่งเดียว โครงสร้างของจำนวนจริงมีเพียงหนึ่งเดียว โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนมีเพียงหนึ่งเดียว เป็นต้น

การแยกออกเป็นสองลักษณะดังกล่าวทำให้ปัญหาหลายๆ ปัญหาในปรัชญาคณิตศาสตร์ไม่เป็นปัญหาอีกต่อไป ซาปิโรได้แบ่งมุมมองตำแหน่งออกเป็นสองประเภท ได้แก่ มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ (the places-are-offices perspective) และมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ (the places-are-objects perspective)¹⁴

2.3.1 มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ

ซาปิโรกล่าวถึงความแตกต่างทางสัทธานุภาพระหว่าง “วัตถุ” กับ “ตำแหน่ง” ซึ่งอยู่ในโครงสร้าง หรือระหว่าง “เจ้าของออฟฟิศ” กับ “ออฟฟิศ” ดังนั้น เราจึงต้องแยก “เจ้าของออฟฟิศ” ออกจาก “ออฟฟิศ” ก่อน หรือหากเปรียบเทียบกับบางสิ่งในชีวิตประจำวันคือ การแยก “บุคคล” ออกจาก “ตำแหน่งหน้าที่ของบุคคล” เช่น เราต้องแยก “โดนัลด์ ทรัมป์” (บุคคล) ออกจาก “ออฟฟิศของประธานาธิบดี” ของคณะรัฐบาลสหรัฐอเมริกา (ตำแหน่งหน้าที่ของบุคคล) เนื่องจากในยุคสมัยหนึ่ง บุคคลที่ดำรงตำแหน่งประธานาธิบดีของสหรัฐอเมริกา อาจจะเป็นคนอื่นที่ไม่ใช่โดนัลด์ ทรัมป์ก็ได้ เช่นเดียวกับที่เราจะต้องแยก “วัตถุ” ที่แสดงบทบาทเป็น 2 ออกจาก “ตำแหน่งที่สอง” วัตถุดังเช่น “๒”, “II”, “ $\{\emptyset\}$ ” และ “ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ” ต่างก็สามารถแสดงบทบาทเป็นตำแหน่งที่สองได้ทั้งสิ้น

พิจารณตารางเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่าง “วัตถุ” (object) กับ “ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง” (a place in a structure) หรือ “เจ้าของออฟฟิศ” (officeholder) กับ “ออฟฟิศ” (office) ดังนี้

วัตถุ/ เจ้าของออฟฟิศ	ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง/ ออฟฟิศ
โดนัลด์ ทรัมป์	ออฟฟิศของประธานาธิบดีสหรัฐอเมริกา
ชัชชาติ สิทธิพันธุ์	ออฟฟิศของแคนดิเดตนายกรัฐมนตรีลำดับที่ 2 จากพรรคเพื่อไทย
ธนธร จีรุงเรืองกิจ	ออฟฟิศของแคนดิเดตนายกรัฐมนตรีจากพรรคอนาคตใหม่
ผลิตโชค อายนบุตร	ออฟฟิศของศิลปินเจ้าของหน้ากากจิ้งโจ้จากรายการ The Mask Singer หน้ากากนักร้อง
ขวัญตา ทรัพย์สินบุรณะ	ออฟฟิศของเจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงาน ชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทย สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมวิทยาศาสตร์ วิจัยและนวัตกรรม (สกสว.)
2	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ
๒	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ
II	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ

¹⁴ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 82.

วัตถุ/ เจ้าของออฟฟิศ	ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง/ ออฟฟิศ
$\{\emptyset\}$	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	ตำแหน่งที่สองในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ

ตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้างนั้นอาจจะถูกกล่าวถึงในบริบทของระบบเดียวกันหรือหลายๆ ระบบก็ได้ ทั้งนี้ ก็เพื่อความสะดวกเวลาที่เรากล่าวถึงข้อความต่างๆ อาทิ

“ประธานาธิบดีคนปัจจุบันของสหรัฐอเมริกามีทรัพย์สินมากกว่าประธานาธิบดีคนก่อน”

“เจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทยคนปัจจุบันมีอายุน้อยกว่าเจ้าหน้าที่ (หลัก) คนก่อน”

“จำนวน 2 ในระบบของเซอรัมโลมีจำนวนสมาชิกน้อยกว่าจำนวน 2 ในระบบของนอยมันน์อยู่เพียง 1 ตัว”

2.3.2 มุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ

ภายใต้มุมมองนี้เราจะกล่าวถึง “ตำแหน่ง” ราวกับว่าเป็น “วัตถุ” ในตัวของมันเอง โดยสิ่งที่บ่งชี้ถึง (denote) ตำแหน่งในโครงสร้างจะถือว่าเป็นเทอมเดี่ยวๆ ที่จริงแท้ (bona fide singular terms)¹⁵ เช่น

“ประธานาธิบดีสหรัฐอเมริกาทำหน้าที่เป็นประธานสภาสูง (Senate)”

“แคนดิเดตนายกรัฐมนตรีลำดับที่ 2 จากพรรคเพื่อไทยเป็นสมาชิกของพรรคเพื่อไทย”

“แคนดิเดตนายกรัฐมนตรีจากพรรคอนาคตใหม่เป็นสมาชิกของพรรคอนาคตใหม่”

“ศิลปินเจ้าของหน้ากากจึงโจจากรายการ The Mask Singer เป็นศิลปินในสังกัดค่ายไวท์มิวสิกในเครือบริษัท จีเอ็มเอ็ม แกรมมี่ จำกัด (มหาชน)”

“เจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทยเป็นนิสิตปริญญาโท ชั้นปีที่ 4 สาขาปรัชญา คณะอักษรศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย”

“ $2 < 3$ ”

“4 เป็นจำนวนประกอบเต็มบวกที่น้อยที่สุด”

“7 เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 10”

เราสามารถเรียกชื่อของ “ตำแหน่ง” แทนชื่อของ “วัตถุ” หรือสามารถเรียกชื่อของ “ออฟฟิศ” แทนชื่อของ “เจ้าของออฟฟิศ” ได้เลย เป็นการละไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่น เราเรียก “ประธานาธิบดีสหรัฐอเมริกา” แทน “โดนัลด์ ทรัมป์” เราเรียก “เจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทย”

¹⁵ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 83.

แทน “ขั้วตา ทรัพย์สินบุรณะ” เป็นต้น สำหรับเรื่องจำนวนนั้น เราสามารถเรียก “ตำแหน่งที่ 2” ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติว่า “2” ได้เลย ในทำนองเดียวกัน เราจะเรียก “ตำแหน่งที่ x” ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติว่า “x” และกล่าวถึง “x” ราวกับว่าเป็นวัตถุจริงๆ ไม่ใช่เป็นตำแหน่งซึ่งมีอยู่ในโครงสร้าง มีข้อสังเกตบางประการเกี่ยวกับการใช้คำว่า “เป็น” หรือ “is” ในทั้งสองมุมมองที่แตกต่างกัน คือ มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศใช้ “เป็น” หรือ “is” ในลักษณะที่เป็นภาคแสดง (predicate) เช่น “ขั้วตา ทรัพย์สินบุรณะ เป็นเจ้าหน้าที่ (หลัก) โครงการประสานงานชุดโครงการเวทีวิจัยมนุษยศาสตร์ไทย” และ “ $\{\{\emptyset\}\}$ is 2” ส่วนมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุนั้นจะใช้ “เป็น” หรือ “is” ในลักษณะที่เป็นเอกลักษณ์ (identity) เช่น “4 เป็นจำนวนประกอบเต็มบวกที่น้อยที่สุด” และ “2 is prime” เป็นต้น

ดังนั้น เมื่อมองจากมุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ จำนวนคือ “ตำแหน่ง” ในขณะที่เมื่อมองจากมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ จำนวนก็คือ “วัตถุ” นั่นเอง

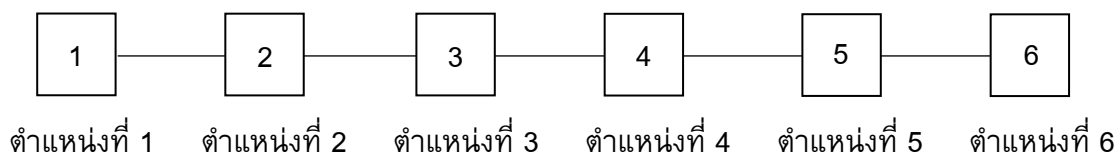
เมื่อกลับมาพิจารณาปัญหาการระบุเอกลักษณ์ของเบนาเซอร์ราฟ เราจะพบว่ามุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศของซาปิโรสามารถให้คำตอบได้ว่าวิธีนิยามจำนวนธรรมชาติโดยลดทอนลงไปสู่ทฤษฎีเซตทั้งสองวิธีตามที่เบนาเซอร์ราฟเสนอล้วนถูกต้องทั้งสิ้น (เมื่อให้จำนวน 0 อยู่ในตำแหน่งที่ 1) ดังนี้

วิธีการนิยามแบบที่หนึ่ง :	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\{\emptyset\}\}$	$\{\{\{\emptyset\}\}\}$	...
วิธีการนิยามแบบที่สอง :	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	...

หรือถ้าจะนิยามแบบอื่น เราก็สามารถทำได้เช่นกัน

วิธีการนิยามแบบที่สาม :	I	II	III	...	
วิธีการนิยามแบบที่สี่ :	๐	๑	๒	๓	...
วิธีการนิยามแบบที่ห้า :	0	1	2	3	...

มุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศทำให้การนิยามจำนวนธรรมชาติเป็นไปได้หลายวิธี เพราะไม่ว่าจะนิยามด้วยวิธีใด ก็ล้วนกลายเป็นระบบใดระบบหนึ่งทั้งสิ้น และทุกๆ ระบบจะสอดคล้องกับโครงสร้างเดียวกัน นั่นคือโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ อาจกล่าวได้ว่าเราสามารถสกัด (abstract) “โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ” ออกมาจากระบบเหล่านั้นได้ ดังแผนภาพต่อไปนี้



ปัญหาของเบนนาเซอร์ราฟจึงไม่ใช่ปัญหาสำหรับชาปีโร เนื่องจากการลดทอนจำนวนธรรมชาติลงไปสู่ทฤษฎีเซตสามารถทำได้หลายวิธีและแต่ละวิธีก็สามารถจัดเป็นการรวบรวมหรือระบบแบบหนึ่ง เช่น การรวบรวมของเซอร์เมโล การรวบรวมของนอยมันน์ เป็นต้น และทุกการรวบรวมจะมีสิ่งที่เหมือนกันคือการเป็นรูปแบบร่วมของโครงสร้างๆ เดียว นั่นคือ โครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ ดังนั้น จุดแข็งของแนวคิดของชาปีโรอีกประการหนึ่งก็คือความสามารถที่จะตอบปัญหาของเบนนาเซอร์ราฟได้และยังรักษาไว้ซึ่งความเป็นวัตถุของจำนวนธรรมชาติ

3. ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้: กรณีศึกษา i และ $-i$

แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มของชาปีโรเผชิญกับปัญหาที่สำคัญทางภววิทยา¹⁶ คือ ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ (Identity of Indiscernibles)¹⁷ ซึ่งเสนอโดยจอห์น พี. เบอร์เจส (John P. Burgess)¹⁸, เจฟฟรีย์ เฮลล์แมน (Geoffrey Hellman)¹⁹ และจุกกา เคราเนน (Jukka Keränen)²⁰

การที่จะอธิบายจำนวน x บางจำนวนตามแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่ม เราทำได้เพียงแค่อธิบายคุณสมบัติภายในเชิงโครงสร้างของจำนวนนั้นในฐานะที่เป็นตำแหน่งหนึ่งในโครงสร้าง เช่น จำนวน 2 ไม่ใช่สิ่งอื่นใดนอกจากการเป็นตำแหน่งที่ 2 ในโครงสร้างของจำนวนธรรมชาติ ซึ่งอยู่ถัดจากตำแหน่งที่ 1 และอยู่ก่อนหน้าตำแหน่งที่ 3 เป็นต้น หากยอมรับเช่นนี้ สิ่งที่ตามมาก็คือ จำนวนบางจำนวนซึ่งมองดูภายนอก (ในลักษณะของการนำไปใช้ในคณิตศาสตร์) เห็นได้ชัดว่าแตกต่างกัน แต่เมื่อพิจารณาเฉพาะคุณสมบัติภายในเชิงโครงสร้างแล้วกลับเหมือนกันและถือว่าเป็นจำนวนเดียวกัน

เบอร์เจสกล่าวว่าในจำนวนเชิงซ้อนเรามีรากสองรากที่เป็นคำตอบของสมการ $z^2 + 1 = 0$ โดยที่ทั้งสองรากนั้นเป็นสังยุคของกันและกัน (conjugate) โดยเมื่อให้คำตอบหนึ่งเป็น i อีกคำตอบหนึ่งจะเป็น $-i$ อย่างไรก็ดี ถ้าพิจารณาฟังก์ชันอัตโนมัติสมมูลฐาน (automorphism) ซึ่งเป็นฟังก์ชันสมมูลฐาน (isomorphism) แบบหนึ่ง

¹⁶ Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*.

¹⁷ รากฐานของปัญหานี้มาจากก๊อตต์ฟรีด ไลบ์นิซ (Gottfried Leibniz) มีใจความสำคัญว่าวัตถุสองวัตถุจะเป็นเอกลักษณ์กัน/เหมือนกัน/เป็นสิ่งเดียวกันเมื่อสอดคล้องกับหลักการดังต่อไปนี้: สำหรับคุณสมบัติ F ใดๆ ถ้าวัตถุ x มีคุณสมบัติ F เมื่อและก็ต่อเมื่อ วัตถุ y มีคุณสมบัติ F แล้ว x และ y จะเป็นเอกลักษณ์กัน

¹⁸ John P. Burgess, "Review of Shapiro (1997)," *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40 (1999): 283-291.

¹⁹ Geoffrey Hellman, "Three Varieties of Mathematical Structuralism," *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001): 184-211.

²⁰ Jukka Keränen, "The Identity Problem for Realist Structuralism," *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001): 308-330.

หรือการสมมูลฐานกับตัวเอง²¹ จะได้ว่า i และ $-i$ ไม่แตกต่างกันโดยคุณสมบัติเชิงพีชคณิต (algebraic properties) อย่างไรก็ดี ทั้งสองจำนวนนั้นแตกต่างกันในทัศนะของฮาปิโร ถึงแม้ดูเหมือนว่าจะไม่มีอะไรที่แยกทั้งคู่ออกจากกันได้เลยก็ตาม เบอร์เจสกล่าวว่าฮาปิโรละเอียดและไม่ได้ให้คำตอบในสิ่งที่ปัญหาดังกล่าว²² ซึ่งนอกจาก i และ $-i$ แล้ว ก็ยังมีกรณีอื่นๆ ที่เป็นปัญหาค้างด้วย เช่น พื้นที่แบบยูคลิด (Euclidean space) เบอร์เจสพบว่าจุดสองจุดใดๆ บนระนาบแบบยูคลิด (Euclidean plane) จะมีฟังก์ชันอัตสมมูลฐานอยู่เสมอ ซึ่งทำให้เราไม่สามารถแยกความแตกต่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบได้

ในทำนองเดียวกันกับข้อแย้งของเฮลล์แมน นอกจากที่จะยกตัวอย่างแย้งในกรณีของจำนวนเชิงซ้อนและพื้นที่แบบยูคลิดแล้ว เฮลล์แมนยังได้กล่าวถึงกรณีของจำนวนเต็มด้วย เช่น 1 และ -1 ที่ไม่สามารถแยกแยะได้โดยคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ภายใน (internal relational properties) โครงสร้างหรือฟังก์ชันอัตสมมูลฐาน สิ่งนี้นำไปสู่ข้อสรุปที่แอบเสิร์ด (absurd)²³ และไม่สามารถยอมรับได้

เราเน้นให้ข้อแย้งไปในทิศทางเดียวกัน แต่เริ่มต้นด้วยข้อเสนอที่ว่าฮาปิโรมีภาระที่จะต้องสามารถให้สูตรความเป็นเอกลักษณ์ (identity schema) ได้ นั่นคือ จะต้องสามารถเติมข้อความลงในช่องว่างต่อไปนี้

$$(IS) \quad \forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \dots)^{24}$$

โดยสูตรที่ฮาปิโรนำมาปรับเพื่อให้ง่ายขึ้น คือ

$$(IND) \quad \forall x (x = a \equiv \dots)$$

การเติมข้อความลงในสูตรข้างต้นจะต้องมีความชัดเจนและไม่กำกวม นักปรัชญาบางส่วนเสนอว่าวัตถุแต่ละวัตถุต่างก็มี “ความเป็นสิ่งนี้” (haecceity) หรือความเป็นตัวของมันเอง (thisness) ที่ทำให้วัตถุนั้นเป็นวัตถุนั้นและไม่ใช่เป็นวัตถุอื่น

นั่นคือ เราสามารถเติมข้อความลงใน (IND) ได้เป็น

$$\forall x (x = a \equiv Ha(x))$$

$$\text{หรือ} \quad \forall x (x = a \equiv x = a)$$

²¹ พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ, ระบบจำนวน (กรุงเทพฯ: วี.พรินท์ (1991), 2558), 22.

²² John P. Burgess, “Review of Shapiro (1997),” *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40 (1999): 288.

²³ Geoffrey Hellman, “Three Varieties of Mathematical Structuralism,” 193.

²⁴ Jukka Keränen, “The Identity Problem for Realist Structuralism,” 312.

สูตรนี้เป็นสูตรความเป็นเอกลักษณ์ที่เฉพาะเจาะจงสำหรับนักโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มหรือฮาปิโร ซึ่งจะต้องระบุให้ชัด

วิธีตอบแบบนี้เป็นวิธีหนึ่งที่นักปรัชญาบางส่วนยอมรับ อย่างไรก็ตาม ถ้าชาปิโรยอมรับมโนทัศน์ดังกล่าว ก็จะทำให้แนวคิดของชาปิโรนั้นไม่ได้แตกต่างไปจากแนวคิดของเพลโต²⁵ เนื่องจากการบอกว่าจำนวนใดจำนวนหนึ่งมีคุณสมบัติ “ความเป็นจำนวนนั้น” ไม่ได้แตกต่างไปจากการบอกว่าแก่นสารสาระของจำนวนธรรมชาติใดก็คือจำนวนธรรมชาตินั้นในตัวเอง ซึ่งตรงกับทัศนะของเพลโต นอกจากนั้นมโนทัศน์ “ความเป็นสิ่งนี้” ก็ยังไม่ใช้คุณสมบัติเชิงโครงสร้างอีกด้วย

เราเสนอว่าสูตรที่เหมาะสมสำหรับแนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่ม คือ

$$(STR) \quad \forall x \forall y (x=y \Leftrightarrow \forall \phi (\phi \in \phi \rightarrow (\phi(x) \Leftrightarrow \phi(y))))^{26}$$

หรือสูตรที่ชาปิโรปรับ ดังนี้

$$(STR)_s \quad \forall x (x=a \equiv \forall \phi (\phi \in Sa \equiv \phi(x)))$$

ปัญหาความเป็นเอกลักษณ์ (the identity problem) ที่ตามมาเมื่อใช้สูตรดังกล่าว คือ 1 และ -1 ในระบบ $(\mathbb{Z}, +)$ ใดๆ จะมีคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ภายในระบบ (intra-systemic relational properties) ที่เหมือนกัน กล่าวคือ $1 = -1$ โดยปัญหาที่ตามานั้น เราจะได้ว่า $0 = 1 + (-1) = 1 + 1 = 2$ หรือ $0 = 2$ ซึ่งไม่เป็นความจริง เนื่องจาก 0 และ 2 ไม่มีคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ภายในระบบที่เหมือนกัน

4. การตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ของชาปิโร

ก่อนที่จะอธิบายถึงการตอบปัญหาของชาปิโรเกี่ยวกับสูตรความเป็นเอกลักษณ์ที่เสนอโดยเรา เสนอจะขอกล่าวถึงวิธีตอบปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของ i และ $-i$ ซึ่งเสนอโดยเจมส์ เลดี้แมน (James Ladyman)²⁷

เลดี้แมนเสนอว่าสำหรับ i และ $-i$ จะมีการสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน (weakly discernibility)²⁸ ตามหลักการ ดังนี้:

²⁵ James Ladyman, “Mathematical Structuralism and the Identity of Indiscernibles,” *Analysis* 65 (2005): 219.

²⁶ Jukka Keränen, “The Identity Problem for Realist Structuralism,” 316.

“... the realist structuralist will complete (IS) as follows.

Given a system S , and given two quantifiers ‘ $\forall x$ ’ and ‘ $\forall \phi$ ’ ranging over the places of the structure S of S ,

(STR), where ‘ $\forall \phi$ ’ is taken to be ranging over the relational properties in S .”

²⁷ James Ladyman, “Mathematical Structuralism and the Identity of Indiscernibles,” 218-221.

²⁸ W. V. Quine, “Grades of Discriminability,” *The Journal of Philosophy* 73 (1976): 113-116.

เลดี้แมนอ้างอิงแนวคิดของไควน์จากหนังสือ “Word and Object” (1960: p. 230) และบทความ “Grades of discriminability” (1976: p.113-116) เกี่ยวกับความแยกออกจากกันได้สามประเภท ได้แก่ ความแยกออกจากกันได้

“วัตถุสองสิ่งใดๆ จะสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน เมื่อมีความสัมพันธ์ทวิภาคแบบไม่สะท้อนกัน (two-place irreflexive relation)”

เนื่องจาก i และ $-i$ มีความสัมพันธ์ทวิภาคแบบไม่สะท้อนกัน ดังนั้น โดยหลักการดังกล่าวทั้งคู่จึงสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน นั่นคือ มีความเป็นไปได้ที่จะมีระบบสองระบบซึ่งสมมูลฐานกัน แต่สมาชิกที่จับคู่กันสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อน ส่วนในกรณีของพื้นที่แบบยูคลิดก็เช่นเดียวกัน จุดสองจุดใดๆ บนระนาบต่างก็สอดคล้องกับหลักการดังกล่าว ดังนั้น เราจึงสามารถแยกความแตกต่างระหว่างจุดสองจุดบนระนาบได้ โดยที่ความแตกต่างนั้นก็คือการสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนนั่นเอง

อย่างไรก็ดี ซาปิโรวิชเสนอข้อเสนอนี้ของเลดีแมน²⁹ เนื่องจากโดยข้อเสนอของเลดีแมน เราจะได้ว่าตำแหน่งสองตำแหน่งใดๆ ในโครงสร้างเชิงการนับ-สี่ (the cardinal-four structure) ก็จะสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนด้วย ซึ่งมีโน้ตสดังกล่าวครอบคลุมมากเกินไป เนื่องจากเราต้องการให้ใช้ได้กับบางเรื่องเท่านั้น (เป็นต้นว่าจำนวนเชิงซ้อนและพื้นที่แบบยูคลิด) สำหรับโครงสร้างเชิงการนับ-สี่นั้นเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยตำแหน่ง 4 ตำแหน่งที่ไม่อยู่เรียงติดกัน โดยโครงสร้างที่ประกอบด้วยจำนวน 1, 2, 3 และ 4 เราไม่จัดว่าเป็นโครงสร้างเชิงการนับ-สี่ แต่จัดว่าเป็นโครงสร้างเชิงอันดับ-สี่ (the ordinal-four structure) ตัวอย่างโครงสร้างเชิงการนับ-สี่ เช่น โครงสร้างของผู้เล่นในกีฬาบริดจ์ที่ประกอบด้วยผู้เล่น 4 คน เป็นต้น

เมื่อเราย้อนกลับมาที่สูตรความเป็นเอกลักษณ์ (STR) ที่เคราเนนเสนอ ซาปิโรวิชยอมรับว่าสูตรนี้ทำให้ได้ว่าการแก้ปัญหาที่เป็นสาระสำคัญ (non-trivial resolution) ของการทำให้เป็นปัจเจก (individuation task) นั้นมีอยู่จริง อย่างไรก็ตาม ซาปิโรวิชเสนอสูตรดังกล่าว เนื่องจากถ้าต้องการให้แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มกลายเป็นปรัชญาคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์พร้อม (full philosophy of mathematics) นอกจากสูตรสำหรับ i และ $-i$ แล้ว ก็จะต้องมีสูตรสำหรับพื้นที่แบบยูคลิดและลำดับชั้นเชิงทฤษฎีเซต (set-theoretic hierarchy) ด้วย แต่เนื่องจากมีวัตถุมากเกินไปและไม่มีสูตรที่มากเพียงพอสำหรับวัตถุเหล่านั้น³⁰ จึงไม่มีการแก้ปัญหาที่เป็นสาระสำคัญข้างต้นและนักโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มต้องปฏิเสธสูตร (STR) ด้วย

สมบูรณ์ (absolutely discernibility), ความแยกออกจากกันได้สัมพัทธ์ (relatively discernibility) และความแยกออกจากกันได้อย่างอ่อน (weakly discernibility)

²⁹ Stewart Shapiro, “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and $-i$,” *Philosophia Mathematica* (III) 16 (2008): 288.

³⁰ Stewart Shapiro, *Structure and identity* in *Identity and Modality*, ed. MacBride (Oxford: Oxford University Press, 2006), 134.

นอกจากนี้ชาปิโรยังไม่ได้มองการมีวัตถุสองวัตถุที่แตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติที่จำเป็นเหมือนกันทุกประการ ว่าเป็นปัญหา³¹ เขายกตัวอย่างดังนี้: ให้ a เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป $b + ci$ (เมื่อ b และ c เป็นจำนวนจริงที่ $c \neq 0$) สิ่งก็ตามมาก็คือจะมีเซต S_a ของคุณสมบัติเชิงความสัมพันธ์ที่เป็นจริงสำหรับทุก a และเมื่อ กำหนดให้ a' อยู่ในรูป $b - ci$ แล้ว จะได้ว่า a' มีคุณสมบัติทุกประการเหมือน S_a กล่าวคือ a และ a' มี คุณสมบัติที่จำเป็นเหมือนกันทุกประการ อย่างไรก็ตาม a และ a' นั้นแตกต่างกัน นั่นคือ มีความเป็นไปได้ เสมอที่ i และ $-i$ แตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติทุกประการเหมือนกัน

สำหรับชาปิโรแล้ว i ทำหน้าที่เป็นเสมือนค่าตัวแปร (parameter) ในระบบนิรนัยธรรมชาติ (natural deduction systems)³² ในกรณีของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อเราไม่สามารถหาค่ารากที่สองของ -1 ได้ ก็เพียงแค่ แทนค่าเหล่านั้นด้วย “ i ” และ “ $-i$ ” หรือมองว่า i เป็นค่าตัวแปรหนึ่ง โดยให้พหุคูณของ i เป็นส่วนจินตภาพ นอกจากนั้นให้เรียกว่าส่วนจริง แยกส่วนจริงออกจากส่วนจินตภาพ และแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยคู่อันดับที่มี สมาชิกเป็นจำนวนจริง³³ ด้วยเหตุนี้ ปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้จึงไม่เป็นปัญหาสำหรับ ชาปิโร ซึ่งเมื่อพิจารณาในการวิเคราะห์เชิงซ้อน (complex analysis) ก็เป็นจริงที่ว่า i และ $-i$ นั้นไม่สามารถ แยกแยะได้ ทุกสิ่งที่เป็นจริงสำหรับ i ก็จะเป็นจริงสำหรับ $-i$ ด้วย และ i ทำหน้าที่เป็นเสมือนค่าตัวแปรใน ระบบนิรนัยธรรมชาติ

5. ข้อประหมื่นของผู้เขียนและบทสรุป

สำหรับปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของ i และ $-i$ นั้น ผู้เขียน เห็นด้วยกับชาปิโรที่ปฏิเสธวิธีการตอบด้วยมโนทัศน์การสามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนของเลดีแมน เนื่องจากมโนทัศน์ดังกล่าวทำให้ตำแหน่งสองตำแหน่งใดๆ ในโครงสร้างเชิงอันดับ (หรือแม้กระทั่งโครงสร้าง เชิงการนับ) สามารถแยกแยะได้อย่างอ่อนด้วย อย่างไรก็ตาม สิ่งนี้ขัดแย้งกับข้อเท็จจริง เนื่องจากถ้าแบ่ง ความแยกออกจากกันได้ออกเป็นสามประเภทตามข้อเสนอของเลดีแมน ตำแหน่งสองตำแหน่งใดๆ ใน โครงสร้างเชิงอันดับก็อาจจะแยกออกจากกันได้สมบูรณ์ (มากกว่าที่จะแยกออกจากกันได้อย่างอ่อน) นอกจากนี้ผู้เขียนก็ยังเห็นด้วยกับชาปิโรที่ปฏิเสธสูตรความเป็นเอกลักษณ์ (STR) ที่เสนอโดยเคราเนน

³¹ Stewart Shapiro, *Structure and identity* in *Identity and Modality*, 140

³² Stewart Shapiro, “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and $-i$,” 294.

³³ Stewart Shapiro, “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and $-i$,” 295

เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $b \neq 0$ เราจะเรียก a ว่าส่วนจริง และเรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ และเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ด้วยคู่อันดับ (a, b) ดังนั้น เราจึงสามารถเขียนแทน i ด้วย $0 + 1i$ หรือ คู่อันดับ $(0, 1)$ และเขียนแทน $-i$ ด้วย $0 + (-1)i$ หรือคู่อันดับ $(0, -1)$

เนื่องจากเราเน้นเรียกร้องบางสิ่งที่มากเกินไปและคงจะไม่มีสูตรที่มากเพียงพอสำหรับวัตถุทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีอยู่เป็นจำนวนมากได้

อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนไม่เห็นด้วยที่ซาปิโรสนับสนุนว่ามีความเป็นไปได้ที่จะมีวัตถุสองวัตถุที่แตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติที่จำเป็นเหมือนกันทุกประการ กล่าวคือ ข้อเสนอของซาปิโรที่ว่า i และ $-i$ มีความแตกต่างกัน แต่มีคุณสมบัติทุกประการเหมือนกันนั้นเป็นปัญหา และวิธีการที่ซาปิโรตอบว่า i ทำหน้าที่เป็นเสมือนค่าตัวแปรในระบบนิรนัยธรรมชาติเป็นวิธีการตอบที่มีลักษณะกำปั้นทุบดินหรือไม่ได้ให้ข้อมูลที่ผู้ถามต้องการจะทราบ และไม่ได้กำลังตอบข้อแย้งอย่างตรงไปตรงมา

ผู้เขียนเสนอว่าในขณะนี้ยังไม่มีคำตอบของปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ใดที่มีเหตุผลที่ดีเพียงพอและน่าพึงพอใจ อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนตั้งคำถามต่อมโนทัศน์ความเป็นสิ่งนี้หรือมโนทัศน์ความเป็นตัวมันเอง ซึ่งทำให้วัตถุนั้นเป็นวัตถุนั้นและไม่เป็นวัตถุอื่นว่า เราจะสามารถอธิบายมโนทัศน์ดังกล่าวได้อย่างไรที่จะไม่ทำให้แนวคิดของซาปิโรเป็นเหมือนกับแนวคิดของเพลโต เนื่องจากสำหรับทัศนะของเพลโตนั้น แก่นสาระของจำนวนธรรมชาติใดก็คือจำนวนธรรมชาตินั้นในตัวของมันเอง ดังนั้น หากเราจะตอบว่า “ i ” และ “ $-i$ ” มีความเป็นตัวของมันเองที่ทำให้ทั้งคู่ต่างกัน (แต่ไม่สามารถแยกแยะได้โดยฟังก์ชันอัตสมสัจฐาน) เราก็ต้องอธิบายให้ได้ว่าวิธีตอบแบบนี้ทำให้ทัศนะของซาปิโรแตกต่างจากทัศนะของเพลโตอย่างไร ผู้เขียนไม่ทราบในจุดนี้และให้ถือว่าเป็นปัญหาของซาปิโรที่จะต้องพยายามตอบให้ได้ต่อไป

ถึงอย่างนั้นก็ตาม ผู้เขียนก็ยังเห็นด้วยกับซาปิโรที่ยืนยันอย่างหนักแน่นว่าแนวคิดของเขาไม่เหมือนกับแนวคิดของเพลโต โดยเฉพาะอย่างยิ่งในประเด็นเรื่องความเป็นสากล (Universals) และความเป็นสิ่งเฉพาะ (Particulars) เพื่อให้เข้าใจง่ายก็อาจเทียบเคียงทัศนะของเพลโตเรื่องแบบ (Form) / สิ่งเฉพาะ กับ โครงสร้างแบบแอนเท เร็มหรือสิ่งสากลแบบแอนเท เร็ม (an ante rem structure or an ante rem universal) / ระบบหรือการรวบรวมของวัตถุ (ร่วมด้วยความสัมพันธ์ที่แน่นอนซึ่งแต่ละวัตถุมีต่อกัน) ซาปิโรยอมรับว่าโครงสร้างแบบแอนเท เร็มกับระบบของวัตถุอยู่ในลักษณะของสิ่งหนึ่งเหนืออีกสิ่ง (one-over-many)³⁴ อย่างไรก็ตาม สิ่งนี้ไม่เป็นปัญหาและไม่ใช้ความลึกลับแต่อย่างใด โครงสร้างเดียวกันอาจเป็นตัวอย่างร่วมหรือเป็นรูปแบบร่วมของระบบหลายๆ ระบบได้ และการมีอยู่ของโครงสร้างเป็นอิสระจากระบบของวัตถุทั้งหลาย ซึ่งอาจอยู่ในขอบเขตอื่นที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์ (non-mathematical realm)

โครงสร้างแบบแอนเท เร็มโครงสร้างใดโครงสร้างหนึ่งจะมีตำแหน่งอยู่หลายตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งจะมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน³⁵ เราจึงอาจเทียบเคียงตำแหน่งได้กับออฟฟิศในโครงสร้างที่เราคุ้นเคย (เช่น

³⁴ Stewart Shapiro, “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and $-i$,” 302.

³⁵ Stewart Shapiro, “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of i and $-i$,” 303

ออฟฟิศต่างๆ ในโครงสร้างของรัฐบาลสหรัฐอเมริกา เป็นต้น) จากมุมมองตำแหน่งเป็นออฟฟิศ โครงสร้างถูกประกอบสร้างขึ้นจากตำแหน่งและความสัมพันธ์ของแต่ละตำแหน่งในวิถีทางเดียวกับที่องค์กร (organization) ถูกประกอบสร้างขึ้นจากออฟฟิศและความสัมพันธ์ระหว่างออฟฟิศนั่นเอง

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าโครงสร้างเป็นอิสระจากระบบของวัตถุ ดังนั้น ลักษณะที่สำคัญประการหนึ่งของโครงสร้างก็คือการมีสถานะที่เป็นอิสระ (free-standing) ไม่ว่าสิ่งใดก็สามารถแทนที่ตำแหน่งในโครงสร้างได้ด้วยเหตุนี้บางครั้งเราจึงอาจคิดถึงตำแหน่งในโครงสร้างแบบเอนเท่ เริ่มว่าตำแหน่งในตัวของมันเองนั้นก็เป็นสิ่งสากลด้วย³⁶ และจริงๆ แล้วตำแหน่งในโครงสร้างอาจเป็นเพียง “สิ่ง” (thing) หรือ “วัตถุ” หรือ “สิ่งเฉพาะ” นี่เป็นอีกวิธีการมองจากมุมมองตำแหน่งเป็นวัตถุ ซึ่งสนับสนุนว่าตำแหน่งเป็นวัตถุที่จริงแท้ในตัวของมันเอง ดังนั้น จากมุมมองตำแหน่งสองประเภทก็คงจะทำให้พอเข้าใจได้ว่าทัศนะของซาปิโรนั้นแตกต่างจากทัศนะของเพลโต

ถึงแม้ว่าซาปิโรจะยังไม่ประสบผลสำเร็จในการตอบข้อโต้แย้งเกี่ยวกับปัญหาเอกลักษณ์ของการไม่สามารถแยกแยะได้ แต่เมื่อเปรียบเทียบกับบางแนวคิดอย่างแนวคิดที่เป็นจุดเริ่มต้นของโครงสร้างนิยมอย่างแนวคิดของเบนนาเซอร์ราฟและแนวคิดสังคมนิยมแบบดั้งเดิมของเพลโต แนวคิดของซาปิโรนี้น่ายอมรับได้มากกว่า ดังนั้น แนวคิดโครงสร้างนิยมแบบเอนเท่ เริ่มของจำนวนในทัศนะของซาปิโรจึงยังคงเป็นแนวคิดหนึ่งที่เราสามารถยอมรับได้

บรรณานุกรม

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. ระบบจำนวน. กรุงเทพฯ : วี.พริ้นท์ (1991), 2558.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมสวัสดิการและสวัสดิภาพครูและบุคลากรทางการศึกษา ลาดพร้าว, 2552.

Benacerraf, Paul. “What Number Could not Be.” *Philosophical Review* 74 (1965): 47-73.

Burgess, John P. “Review of Shapiro (1997).” *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40 (1999): 283-291.

Hellman, Geoffrey. “Three Varieties of Mathematical Structuralism.” *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001): 184-211.

Horsten, Leon. “Philosophy of Mathematics,” *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

<https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics> (accessed September 26, 2017).

³⁶ Stewart Shapiro, “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of *i* and *-I*,” 307

- Keränen, Jukka. "The Identity Problem for Realist Structuralism." *Philosophia Mathematica* 9, no. 3 (2001): 308-330.
- Ladyman, James. "Mathematical structuralism and the identity of indiscernibles." *Analysis* 65 (2005): 218-221.
- Quine, W. V., "Grades of discriminability." *The Journal of Philosophy* 73 (1976): 113-116.
- Shapiro, Stewart. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. New York: Oxford University Press, 1997.
- Shapiro, Stewart. *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2000.
- Shapiro, Stewart. "Structure and identity." in *Identity and Modality*. Edited by MacBride. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- Shapiro, Stewart. "Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of *i* and *-i*." *Philosophia Mathematica* (III) 16 (2008): 285-309.