

รากที่สอง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนและการวินิจฉัย

พีระฉัตร คชลี¹, สุดใจ เขียนภักดี², นิพิฐพนธ์ สนิทเหลือ³, สุมิตรา ยาประดิษฐ์⁴ และ วรนาถ รัตนมณี⁵

^{1,2,3,4,5}อาจารย์ประจำ คณะศึกษาศาสตร์และศิลปศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีแห่งสุวรรณภูมิ

SQUARE ROOTS MISCONCEPTION AND DIAGNOSIS

Peerachat Khotchalee¹, Sudjai Kianpakdee², Nipitpholt Sanitlou³, Sumitra Yapradit⁴

and Voranart Ratanamanee⁵

^{1,2,3,4,5} Lecturer of Education and Liberal Arts Faculty, Suvarnabhumi Institute of Technology

วันที่รับบทความ (Received) 20 มกราคม 2566

วันที่ได้รับบทความฉบับแก้ไข (Revised) 19 กุมภาพันธ์ 2566

วันที่ตอบรับบทความ (Accepted) 28 กุมภาพันธ์ 2566

บทคัดย่อ

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หรือ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Concept in Mathematics) เป็นเรื่องสำคัญต่อการวิเคราะห์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ปัจจุบันครูผู้สอนมักมองข้ามการวินิจฉัย มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และมุ่งเน้นวิธีการหาคำตอบของโจทย์คณิตศาสตร์มากกว่า ซึ่งในบางครั้งครูผู้สอนเองก็อาจมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเสียเอง

ปัจจุบันสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หรือ สสวท. ให้ความสำคัญกับความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มากขึ้น โดยเพิ่มหัวข้อความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของแต่ละเนื้อหาในคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมของหลักสูตรใหม่ เพื่อเป็นตัวอย่างให้ครูผู้สอนได้ทราบ และป้องกันไม่ให้นักเรียนเกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อน แต่บางโรงเรียนไม่ได้ใช้หนังสือเรียนของ สสวท. หรือครูผู้สอนเองอาจละเลยไม่ศึกษาคู่มือครูอย่างละเอียด มุ่งสอนแต่เนื้อหาตามหนังสือเรียนจึงไม่ได้เน้นย้ำในเนื้อหาที่ให้นักเรียนอาจเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนได้ง่าย ซึ่งในบทความนี้ผู้เขียนจะนำเสนอตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนและการวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องรากที่สอง

คำสำคัญ: รากที่สอง, ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนและการวินิจฉัย

Abstract

Understanding in Mathematics or concept in Mathematics is important for analyzing the students' understanding in Mathematics. Nowadays, teachers usually overlook the diagnosis of the concept in Mathematics and focus only on the way to find the answer of the Mathematics problem instead. Sometimes, even teachers also misunderstand the concept in Mathematics.

Nowadays, the Institute for the Promotion of Science and Technology (IPST) pays more attention to the misunderstanding of the concept in Mathematics and adds the topic about the misunderstanding in each unit of teacher's manual for the basic Mathematics subject and the advanced Mathematics subject of the new curriculum with the aim to be an example for both teachers and students. However, some schools do not use the teaching book from IPST and the teachers do not pay attention to the teacher's manual or the Mathematics concept that easy to misunderstand. In this article, the researcher will present an example including the way to analyze the misunderstanding of the concept in Mathematics of the Square Root.

Keywords : Square Roots , Misconceptions and Diagnosis

บทนำ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์และเกี่ยวข้องกับผู้ที่ต้องใช้ความคิด การวิเคราะห์อย่าง มีระบบและหลักการ เป็นการแสดงถึงเหตุและผลต่อกัน ผู้เรียนจะมีความคิดรวบยอดมีเหตุผลในการแก้ปัญหา รู้จักการทำกิจกรรมด้วยความเข้าใจและเกิดความคิดสร้างสรรค์ ทั้งด้านความคิดสร้างสรรค์และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้มีการสนับสนุนการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีลักษณะดังกล่าว โดยใช้การกำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ซึ่งสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์มี 6 สาระ ได้แก่ (1) จำนวนและการดำเนินการ (2) การวัด (3) เรขาคณิต (4) พีชคณิต (5) การวิเคราะห์ข้อมูลและ ความน่าจะเป็น และ (6) ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (สำนักงานคณะกรรมการและมาตรฐาน การศึกษา, 2551: 2-3) โดยเฉพาะสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนไว้ในมาตรฐาน ค 6.1 คือ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อ ความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และมีการ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์ในแขนงอื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ (Mathematical problem solving) จำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ ซึ่งมีตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขยกกำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ เป็นความสามารถหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีความจำเป็นอย่างยี่ที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวของพวกเขา เพราะการเรียนรู้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้

นักเรียนมีแนวทางการคิดที่ หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ ทั้งภายในและ ภายนอกห้องเรียน เพื่อใช้เป็นพื้นฐานที่นักเรียนจะสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ตลอดชีวิต (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551)

ในประเทศไทยการจัดกระบวนการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา ครูจะมุ่งเน้นที่เนื้อหาทางคณิตศาสตร์มากกว่าทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์จึงทำให้เกิดความไม่คุ้นเคยกับ การเรียนการสอนที่เน้นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการแก้ปัญหา โดย การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนั้น นักเรียนไม่สามารถที่จะนำความรู้ความเข้าใจที่มีจากการ เรียนคณิตศาสตร์ในห้องเรียน ไปใช้แก้ปัญหาจริงในชีวิตประจำวันได้ กล่าวคือ นักเรียนไม่สามารถ เชื่อมโยงความรู้ที่เกี่ยวข้อง การให้เหตุผลอธิบาย ตลอดจนการหาแหล่งอ้างอิงความรู้ที่ได้จาก สถานการณ์ปัญหา การนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา ในเชิงการประยุกต์ใช้ เนื้อหาทางคณิตศาสตร์อย่าง สร้างสรรค์ ทำให้ขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์จะเป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อมนุษย์ แต่การจัดการเรียน การสอนในปัจจุบันพบว่ายังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หรือ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Concept in Mathematics) เป็นเรื่องสำคัญต่อการวิเคราะห์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนปัจจุบัน ครูผู้สอนมักมองข้ามการวินิจฉัยมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และมุ่งเน้นวิธีการหาคำตอบของโจทย์คณิตศาสตร์ มากกว่า ในบางครั้งครูผู้สอนเองก็อาจมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเสียเอง (วรณูช แหมมแสง, 2561 หน้า 23)

บทความนี้มีวัตถุประสงค์ของงานวิจัยเพื่อนำเสนอตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนและการวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องรากที่สอง ในส่วนของการวินิจฉัยและเพื่อนำเสนอตัวอย่างของความเข้าใจคลาดเคลื่อน ซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้ค้นหาวิธีการคำนวณรากที่สองของสองในรูปแบบต่าง ๆ กัน เพื่อเขียนค่าประมาณใกล้เคียงของรากที่สองของสองออกมาในรูปของอัตราส่วนของจำนวนเต็มหรือเลขทศนิยม หนึ่งในวิธีการที่ถือว่าเป็นเบื้องต้นที่สุดคือขั้นตอนวิธีของบาบิโลเนีย และเพื่อคำนวณรากที่สองของสอง ซึ่งถือเป็นพื้นฐานการคำนวณของคอมพิวเตอร์และเครื่องคิดเลข ขั้นตอนวิธีเพื่อหารากที่สอง รากที่สองกับกรณีที่สองต่างกันอย่างไร คำถามนี้ชวนให้สงสัยนี้อาจทำให้สับสนจนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนว่า รากที่สองและกรณีที่มีค่าเหมือนกัน ถ้านักเรียนที่มีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนอาจจะทำให้นำความรู้ไปใช้อย่างไม่ถูกต้องหรือนำไปใช้ไม่ได้ รวมทั้งอาจทำให้ความรู้พื้นฐานไม่ดีพอที่จะเรียนรู้มโนทัศน์อื่น (อัมพร ม้าคอง, 2558, หน้า 98)

ปัจจุบันสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หรือ สสวท. ให้ความสำคัญกับความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มากขึ้น โดยเพิ่มหัวข้อความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของแต่ละเนื้อหาในคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมของหลักสูตรใหม่ เพื่อเป็นตัวอย่างให้ครูผู้สอนได้ทราบ และป้องกันมิให้นักเรียนเกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อน แต่บางโรงเรียนไม่ได้ใช้หนังสือเรียนของ สสวท. หรือครูผู้สอนเองอาจละเลยไม่ศึกษาคู่มือครูอย่างละเอียด มุ่งสอนแต่เนื้อหาตามหนังสือเรียนจึงไม่ได้เน้นย้ำในเนื้อหาที่ทำให้นักเรียนอาจเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนได้ง่าย

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับรากที่สอง

ก่อนศึกษาความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับรากที่สอง ควรมีความเข้าใจที่ถูกต้องเสียก่อน สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2562, หน้า 71 – 83) ได้อธิบายความหมายเกี่ยวกับรากที่สองไว้ดังนี้

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ **รากที่สอง (square root)** ของ a คือ

จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

- ✕ ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองราก คือ รากที่สองที่เป็นบวก ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และรากที่สองที่เป็นลบ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$
- ✕ ถ้า $a = 0$ รากที่สองของ a คือ 0

จากบทนิยาม จะได้ $(\sqrt{a})^2 = a$ และ $(-\sqrt{a})^2 = a$

เมื่อ $a \geq 0$ จะได้ $\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a}$ ซึ่งเป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ a อาจเรียกอีกอย่างว่า กรณฑ์ที่สองของ a

เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนจริงลบ จึงยังไม่กล่าวถึงรากที่สองของจำนวนจริงลบ

การพิจารณาว่ารากที่สองของจำนวนตรรกยะบวกเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

สำหรับจำนวนเต็มบวก

- ✕ ถ้าสามารถหาจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ รากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม
- ✕ ถ้าไม่สามารถหาจำนวนเต็มที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้ รากที่สองของจำนวนนั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

สำหรับจำนวนเต็มบวก

- ✕ ถ้าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกที่ รากที่สองของจำนวนนั้นเป็นจำนวนตรรกยะ
- ✕ ถ้าไม่สามารถหาจำนวนตรรกยะที่ยกกำลังสอง แล้วเท่ากับจำนวนตรรกยะบวกที่ รากที่สองของจำนวนนั้นเป็นจำนวนอตรรกยะ

การหารากที่สอง

การหารากที่สองของจำนวนจริงทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะใช้วิธีแยกตัวประกอบหรือการประมาณ

1) การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

การหารากที่สองของจำนวนเต็มบวกที่สามารถแยกตัวประกอบได้

เช่น จงหารากที่สองของ 400

เนื่องจาก $400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$$= (2 \times 2 \times 5)^2$$

$$= 20^2$$

$$\text{และ } 400 = (-20)^2$$

ดังนั้น รากที่สองของ 400 คือ 20 และ -20

$$\text{จงหา } -\sqrt{1,764}$$

$$\text{เนื่องจาก } -\sqrt{1,764} = -\sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7}$$

$$= -\sqrt{(2 \times 3 \times 7)^2}$$

$$= -(2 \times 3 \times 7)$$

$$= -42$$

$$\text{ดังนั้น } -\sqrt{1,764} = -42$$

2) การหารากที่สองโดยการประมาณ

เมื่อรากที่สองของจำนวนเต็มบวกไม่เป็นจำนวนเต็มบวก ค่าที่ได้จะเป็นจำนวนอตรรกยะ แต่เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ จึงต้องหาค่าประมาณของจำนวนอตรรกะนั้น ในกรณีที่จำนวนที่ต้องการหารากที่สองมีค่าใกล้เคียงกับจำนวนที่สามารถหารากที่สองได้ง่าย จะประมาณรากที่สองของจำนวนนั้นด้วยรากที่สองของจำนวนที่ใกล้เคียงกัน เช่น

$$15 \text{ ใกล้เคียงกับ } 16 \text{ และ } \sqrt{16} = 4 \text{ ดังนั้น } \sqrt{15} \approx 4$$

$$10 \text{ ใกล้เคียงกับ } 9 \text{ และ } \sqrt{9} = 3 \text{ ดังนั้น } \sqrt{10} \approx 3$$

$$165 \text{ ใกล้เคียงกับ } 169 \text{ และ } \sqrt{169} = 13 \text{ ดังนั้น } \sqrt{165} \approx 13$$

ถ้าต้องการประมาณเป็นทศนิยม สามารถทำได้ดังนี้

เช่น การประมาณค่าของ $\sqrt{13}$

1. $\sqrt{13}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งอยู่ระหว่างจำนวนเต็มบวกสองจำนวน คือ 3 และ 4 แสดงได้ดังนี้

$\sqrt{n}$	3	$\sqrt{13}$	4
n	9	13	16

จากตารางจะเห็นว่า 13 มีค่าใกล้เคียง 16 มากกว่า 9 ถ้าต้องการประมาณค่าของ $\sqrt{13}$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ค่าประมาณ 4

2. ถ้าต้องการประมาณค่าของ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง ต้องแสดงการหาต่อไป ดังนี้

จากตารางในข้อ 1 จะเห็นว่า $\sqrt{13}$ มีค่าใกล้เคียง 4 มากกว่า 3 จึงเริ่มพิจารณาในช่วงจาก 3.5 แต่ไม่เกิน 4

$\sqrt{n}$	3.5	3.6	$\sqrt{13}$	3.7
n	12.25	12.96	13.00	13.69

จากตารางจะเห็นว่า 13 มีค่าใกล้เคียง 12.96 มากกว่า 13.69 จึงประมาณ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่งได้เป็น 3.6

3. ถ้าต้องการประมาณค่าของ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่ง ต้องแสดงการหาต่อไป ดังนี้

จากตารางในข้อ 2 จะเห็นว่า $\sqrt{13}$ มีค่าใกล้เคียง 3.6 มากกว่า 3.7 จึงเริ่มพิจารณาในช่วงจาก 3.60 แต่ไม่เกิน 3.65

$\sqrt{n}$	3.60	$\sqrt{13}$	3.61
n	12.9600	13.0000	13.0321

จากตารางจะเห็นว่า 13 มีค่าใกล้เคียง 13.0321 มากกว่า 12.9600 จึงประมาณ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่งได้เป็น 3.61

4. ถ้าต้องการประมาณค่าของ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสามตำแหน่ง ต้องแสดงการหาต่อไป ดังนี้

จากตารางในข้อ 3 จะเห็นว่า $\sqrt{13}$ มีค่าใกล้เคียง 3.61 มากกว่า 3.60 จึงเริ่มพิจารณาในช่วงจาก 3.605 แต่ไม่เกิน 3.61

$\sqrt{n}$	3.605	$\sqrt{13}$	3.606
n	12.996025	13.000000	13.003236

จากตารางจะเห็นว่า 13 มีค่าใกล้เคียง 13.003236 มากกว่า 12.996025 จึงประมาณ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมสองตำแหน่งได้เป็น 3.606

ถ้าต้องการประมาณค่าของ $\sqrt{13}$ เป็นทศนิยมหลายตำแหน่งกว่านี้ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

สมบัติของกรณฑ์ที่สองที่นักเรียนควรทราบ

การเปรียบเทียบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

$$\text{เมื่อ } a > 0, b > 0 \quad \text{ถ้า } a < b \text{ แล้ว } \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

การหาผลคูณและผลหารจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง

$$\text{เมื่อ } a > 0, b > 0 \text{ จะได้ } \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\text{และ } a > 0, b > 0 \text{ จะได้ } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

จากสมบัติสองข้อนี้ช่วยให้การจัดรูปและการหาคำตอบของจำนวนจริงซึ่งเกี่ยวกับกรณฑ์ที่สอง ทำได้สะดวกขึ้น เช่น $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

การหาผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ที่สอง

ถ้าจำนวนภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สองเป็นจำนวนเดียวกันจะบวกลบกันได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2562, หน้า 113 - 119)

เช่น จงเขียน $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} &= (2 + 5 - 4)\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

จงเขียน $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \\
 &= (2 + 3 - 1)\sqrt{3} \\
 &= 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับรากที่สอง

รากที่สองกับกรณฑ์ที่สองต่างกันอย่างไร คำถามนี้ชวนให้สงสัยนี้อาจทำให้สับสนจนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนว่า รากที่สองและกรณฑ์มีค่าเหมือนกัน ถ้านักเรียนที่มีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนอาจจะทำให้ นำความรู้ไปใช้อย่างไม่ถูกต้องหรือนำไปใช้ไม่ได้ รวมทั้งอาจทำให้ความรู้พื้นฐานไม่ดีพอที่จะเรียนรู้บทอื่น (อัมพร ม้าคนอง, 2558, หน้า 98) ตัวอย่างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับรากที่สองพบบ่อยครั้ง แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนและความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับรากที่สองและกรณฑ์ที่สอง

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน	ความเข้าใจที่ถูกต้อง
ข้อที่ 1. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า รากที่สองของ 9 คือ 3	ข้อที่ 1. จากนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ รากที่สอง (square root) ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a ดังนั้น รากที่สองของ 9 คือ 3 และ -3 เพราะ $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$
ข้อที่ 2. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า รากที่สองของ a และกรณฑ์ที่สองของ a เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก มีความหมายเดียวกัน	ข้อที่ 2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองราก คือ รากที่สองที่เป็นบวก ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และรากที่สองที่เป็นลบ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$ ซึ่ง $\sqrt{a}$ อาจเรียกอีกอย่างว่า กรณฑ์ที่สองของ a ดังนั้น กรณฑ์ที่สองของ a เป็นรากหนึ่งที่เป็นบวกของรากที่สองของ a
ข้อที่ 3. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า การหารากที่สองของจำนวนจริงบวก หรือ ศูนย์ หรือกรณฑ์ที่สองของจำนวนจริงบวก คือการนำจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ไปหารด้วยสอง เช่น รากที่สองของ 16 คือ 8 เพราะ $\frac{16}{2} = 8$	ข้อที่ 3. จากนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ หรือศูนย์ รากที่สอง (square root) ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a ดังนั้น รากที่สองของ 16 คือ 4 และ -4 เพราะ $4^2 = 16$ และ $(-4)^2 = 16$

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน	ความเข้าใจที่ถูกต้อง
ข้อที่ 4. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า $\sqrt{a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก มีค่าทั้งที่เป็นจำนวนบวกและจำนวนลบ เช่น $\sqrt{9} = \pm 3$	ข้อที่ 4. เนื่องจาก ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองราก คือ รากที่สองที่เป็นบวก ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และรากที่สองที่เป็นลบ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$ จะได้ว่า $\sqrt{9}$ เป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ 9 ซึ่งคำตอบเป็น 3 เท่านั้น ดังนั้น $\sqrt{9} = 3$
ข้อที่ 5. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า $\sqrt{a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มลบ มีค่าเป็นจำนวนลบ เช่น $\sqrt{-4} = -2$	ข้อที่ 5. เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใดเมื่อยกกำลังสองแล้วได้เป็นจำนวนจริงลบ ดังนั้นจึงไม่มีกรณีที่สองของ -4 ในระบบจำนวนจริง
ข้อที่ 6. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า $\sqrt{x^2} = x$ เช่น $\sqrt{(-3)^2} = -3$	ข้อที่ 6. เนื่องจาก $(-3)^2 = 3^2$ ดังนั้น $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2}$ $= 3$
ข้อที่ 7 นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า ถ้า $x^2 = 9$ แล้ว $x = 3$ เท่านั้น เนื่องจากคุ้นเคยจากการหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากด้วยทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งต้องการเฉพาะค่ารากที่สองที่เป็นบวก	ข้อที่ 7 จาก $x^2 = 9$ เนื่องจาก $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$ ดังนั้น $x = 3$ และ $x = -3$
ข้อที่ 8 นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า สามารถนำจำนวนที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สองที่แตกต่างกันมาหาผลบวกและผลต่างกันได้เลย เช่น $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$	ข้อที่ 8 เนื่องจากไม่มีสมบัติของกรณฑ์ที่สองของจำนวนจริงที่สามารถนำจำนวนที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สองที่แตกต่างกัน แล้วนำมาหาผลบวกหรือผลต่างได้ ดังนั้น $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน	ความเข้าใจที่ถูกต้อง
ข้อที่ 9 นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ โดยไม่คำนึงว่า a และ b ต้องมากกว่าศูนย์ เช่น $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{36} = \sqrt{6}$	ข้อที่ 9 จากสมบัติของกรณฑ์ที่สอง เมื่อ $a > 0, b > 0$ จะได้ $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ดังนั้น $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}$ ไม่สามารถหาค่าได้เนื่องจากจำนวนที่อยู่ภายใต้กรณฑ์เป็นจำนวนเต็มลบ
ข้อที่ 10. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ หรือ $\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$ โดยอาจเข้าใจว่าสามารถใช้สมบัติเดียวกันกับ $\sqrt{a^2} = a, a \geq 0$ ได้ เช่น $\sqrt{6^2 + 8^2} = 6 + 8$ $= 14$	ข้อที่ 10. เนื่องจากการหาค่าผลบวกของกำลังสองหรือผลต่างของกำลังสองที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์เดียวกัน จะต้องหาผลลัพธ์เสียก่อนจึงใช้สมบัติ $\sqrt{a^2} = a, a \geq 0$ ได้ ดังนั้น $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64}$ $= \sqrt{100}$ $= \sqrt{10^2}$ $= 10$
ข้อที่ 11. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า $a\sqrt{b} - \sqrt{b} = a$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก เช่น $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3$	ข้อที่ 11. ถ้าจำนวนภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สองเป็นจำนวนเดียวกันจะบวกลบกันได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง ดังนั้น $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = (3 - 1) \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2564, หน้า 103; Ayten Ozkan, 2019, pp. 207 – 210)

การวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเรื่องรากที่สอง

การวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเป็นการประเมินเพื่อค้นหาข้อบกพร่อง หรือจุดที่เป็นอุปสรรคในการเรียนของนักเรียน ซึ่งการวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์จะใช้แบบทดสอบวินิจฉัย (Diagnostic Test) ซึ่งรูปแบบของการวินิจฉัยมีหลายประเภท เช่น จากการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก จากการทำแบบทดสอบแบบเลือกตอบพร้อมให้ระบุเหตุผลด้วยว่าทำไมจึงตอบตัวเลือกนี้ และแบบทดสอบที่แสดงวิธีทำไม่ว่าจะเลือกใช้แบบใดก็อาจจะมีจุดบกพร่องของแต่ละแบบ

ดังนั้นปัจจุบันจึงมักเลือกวิธีวินิจฉัยหลาย ๆ เทคนิครวมกัน เช่น หลังจากการทำแบบทดสอบแล้วจะมีการนำผู้สอบมาสัมภาษณ์ต่อ (วรณัฐ แหม่มแสง, 2561, หน้า 26)

ตัวอย่างการวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเรื่องรากที่สองด้วยแบบทดสอบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนรูปแบบต่าง ๆ มีดังนี้

1. การวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเรื่องรากที่สองด้วยแบบทดสอบแบบเลือกตอบ พร้อมระบุให้เหตุผล (พรธิดา สุขกรม, 2557, หน้า 63 – 85)

รากที่ 2 ของ 64 คือ 8
 ข้อความนี้เป็น (จริง/ เท็จ)
 เนื่องจาก $8 \times 8 = 64$

ภาพที่ 1 ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ

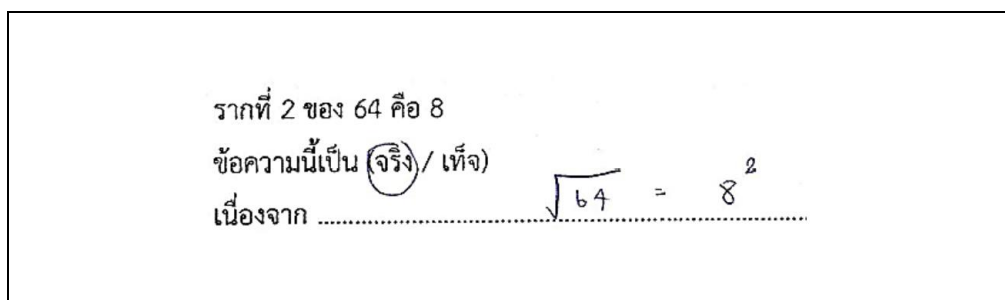
จากภาพที่ 1 นักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับบทนิยามของรากที่สอง โดยเข้าใจคลาดเคลื่อนว่ารากที่สองของ 64 คือ 8 เพียงค่าเดียว เพราะ $8 \times 8 = 64$ แต่ความเข้าใจที่ถูกต้องคือ รากที่สองของ 64 คือ 8 และ -8 เพราะ $8^2 = 64$ และ $(-8)^2 = 64$

รากที่ 2 ของ 64 คือ 8
 ข้อความนี้เป็น (จริง/ เท็จ)
 เนื่องจาก $\sqrt{64} = 8$

ภาพที่ 2 ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ

จากภาพที่ 2 นักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับบทนิยามของรากที่สอง โดยเข้าใจคลาดเคลื่อนว่ารากที่สองของ 64 มีความหมายเดียวกันกับ $\sqrt{64}$ จึงได้ว่า รากที่สองของ 64 คือ 8 เพราะ $\sqrt{64} = 8$ แต่ความเข้าใจที่ถูกต้องคือ รากที่สองของ 64 มีสองราก คือ รากที่เป็นบวก เขียนแทนด้วย $\sqrt{64} = 8$ และรากที่เป็นลบ เขียนแทนด้วย $-\sqrt{64} = -8$

ในบางครั้งแบบทดสอบวินิจฉัยหนึ่งเดียว สามารถวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนได้หลายด้าน เช่น

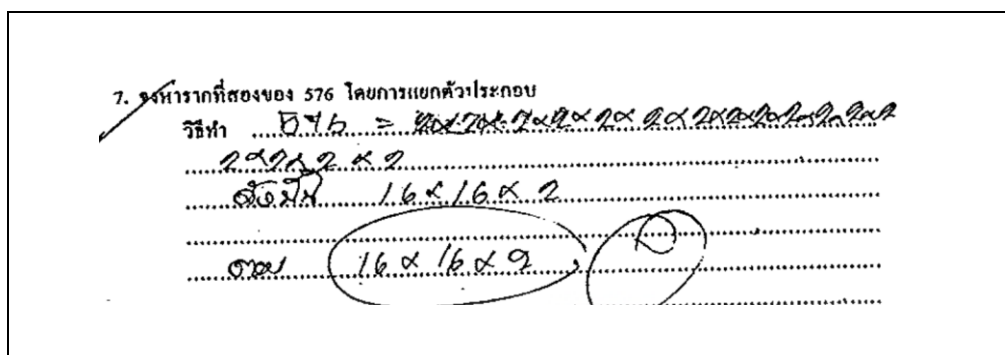


ภาพที่ 3 ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ และด้านการคิดคำนวณ

จากภาพที่ 3 นักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับบทนิยามของรากที่สองเช่นเดียวกับภาพที่ 2 และขาดความระมัดระวังในการคำนวณ เนื่องจาก $\sqrt{64} = 8$ แต่คำนวณเป็น $\sqrt{64} = 8^2$

การวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนโดยใช้แบบทดสอบแบบเลือกตอบพร้อมให้ระบุเหตุผลอาจมีจุดบกพร่องอยู่บ้างในกรณีที่นักเรียนไม่เขียนเหตุผลว่าเพราะอะไรถึงเลือกตอบเช่นนี้ เพราะบอกเหตุผลไม่ได้ ดังนั้นหลังตรวจแบบทดสอบแล้วอาจเรียกนักเรียนมาสัมภาษณ์ต่อ

2 การวินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเรื่องรากที่สองด้วยแบบทดสอบแบบแสดงวิธีทำ และสัมภาษณ์ (สมพร พลจันทร์, 2555, หน้า 123 – 127)



ภาพที่ 4 ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ

หลังจากตรวจแบบทดสอบแล้วพบว่านักเรียนอาจเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนขึ้น จึงได้เรียกนักเรียนมาสัมภาษณ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ครูผู้สอน : โจทย์ต้องการให้นักเรียนทำอะไร

นักเรียน : รากที่สองของ 576

ครูผู้สอน : หาผลลัพธ์ได้อย่างไร

นักเรียน : แยกตัวประกอบของ 576 โดยเอา $16 \times 16 \times 2$

ครูผู้สอน : ทำไมจึงคิดแบบนั้น ลองอธิบายขั้นตอนการทำให้ครูฟังหน่อย

นักเรียน : เพราะคิดว่า $16 \times 16 \times 2$ เมื่อคูณกันแล้วได้เท่ากับ 576

ครูผู้สอน : คิดว่าคำตอบถูกต้องหรือไม่

นักเรียน : ไม่แน่ใจ

จากการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนขาดความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการหารากที่สองโดยวิธีแยกตัวประกอบ สาเหตุเกิดจากนักเรียนมีความรู้เดิมที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเลขยกกำลัง ทำให้ไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้มาใช้ในการหารากที่สองได้ ส่งผลให้นักเรียนเข้าใจหลักการหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบคลาดเคลื่อน

๑. จงหาผลลัพธ์ของ $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45}$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} \sqrt{90} - \sqrt{80} + \sqrt{45} \\ \sqrt{90} \\ \sqrt{20} \\ \sqrt{15} + \\ 105 \\ \hline \text{now } 105 \end{array}$$

ภาพที่ 5 ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ

หลังจากตรวจแบบทดสอบแล้วพบว่านักเรียนอาจเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนขึ้น จึงได้เรียกนักเรียนมาสัมภาษณ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ครูผู้สอน : โจทย์ต้องการให้นักเรียนทำอะไร

นักเรียน : ให้หาผลลัพธ์ของ $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45}$

ครูผู้สอน : หาผลลัพธ์ได้อย่างไร

นักเรียน : เอาตัวเลขภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สองออกมาลบและบวกกันเลย

ครูผู้สอน : ทำไมจึงคิดแบบนั้น ลองอธิบายขั้นตอนการทำให้ครูฟังหน่อย

นักเรียน : คิดว่าน่าจะเอาตัวเลขที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์มาบวกลบกันได้เลย

ครูผู้สอน : คิดว่าคำตอบถูกต้องหรือไม่

นักเรียน : ไม่แน่ใจ

จากการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับบทนิยามและสมบัติของกรณฑ์ที่สอง และไม่เข้าใจหลักการหาค่าของกรณฑ์ที่สอง

บทสรุป

ในบทความนี้เนื้อหาบทที่สองมีขอบเขตไม่เกินระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและเป็นเนื้อหาพื้นฐานสำหรับการเรียนรู้ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายหรือระดับที่สูงขึ้นซึ่งมักพบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนอยู่มากจากการศึกษางานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศพบว่านักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเรื่องรากที่สองคล้ายคลึงกันดังตัวอย่างที่กล่าวมา ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความนี้จะประโยชน์ต่อครูผู้สอนหรือผู้ที่เกี่ยวกับการศึกษา สำหรับทบทวนความรู้ นำไปประยุกต์ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นความเข้าใจที่ถูกต้อง และเป็นข้อมูลเพื่อสำหรับเน้นในประเด็นที่นักเรียนมักเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนบ่อยในระหว่างการสอน ทั้งยังใช้เป็นแนวทางให้ครูผู้สอนได้วินิจฉัยความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาอื่น ๆ

เอกสารอ้างอิง

- วรณัฐ แหยมแสง. (2561). *การวัดและประเมินผลคณิตศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- พรธิดา สุขกรม. (2557). *การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2*. (วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย).
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2564). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (พิมพ์ครั้งที่ 1). สืบค้นจาก <https://www.scimath.org/ebook-mathematics/item/10546-2019-08-20-08-37-04>.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- _____ (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมพร พลจันทร์. (2555). *การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. (วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม)

อัมพร ม้าคะนอง. (2558). *คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Ozkan, A. (2019). Misconceptions in radical numbers in secondary school mathematics. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, 6(1), 205–212.