ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5

แก้วตา เสวิกา* อโรชา แก้ววะศรี* และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์*

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ผลการศึกษาแบ่งได้เป็นสามกรณี คือ $\#(2)=\#(5)$, $\#(2)=\#(5)+1$ และ $\#(5)=\#(2)+1$ ผลการศึกษาช่วยให้การคำนวณมีความสะดวก และรวดเร็วขึ้น อีกทั้งยังแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของรูปทั่วไปของผลคูณนี้

คำสำคัญ : ผลคูณ จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5

* สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000 อีเมล : aiyared.ia@up.ac.th

Generalized Beauty: The Product of Numbers that Every Digit is 2 and Numbers that Every Digit is 5

Kaewta Sawika, Arocha Kaewwasri and Aiyared Iampan*

Abstract

The objective of this article was to study a general form of the product of numbers that every digit as 2 and numbers that every digit as 5. The study was divided into three cases: $\#(2)=\#(5)$, $\#(2)=\#(5)+1$ and $\#(5)=\#(2)+1$. The study allows the calculation with ease and quickly. Moreover, the result show the beauty of a general form of this product.

Keywords: Product, Number that every digit as 2, Number that every digit as 5

*Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000. Email: aiyared.ia@up.ac.th

บทนำ

การคำนวณค่าทางพีชคณิตของจำนวนมีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของเราเป็นอย่างมาก บางครั้งอาจต้องใช้เครื่องมือช่วยในการคำนวณที่มีความหลากหลาย เพื่อให้เกิดความสะดวกและรวดเร็วในการได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่ถูกต้อง การคำนวณหาค่าทางพีชคณิตของจำนวนที่มีจำนวนหลักมากๆ ยิ่งทำให้การคิดคำนวณหาผลลัพธ์มีความยุ่งยากและซับซ้อนมากขึ้น เครื่องมือช่วยบางตัว เช่น เครื่องคิดเลข คอมพิวเตอร์ อาจไม่สามารถหาผลลัพธ์ให้เราได้สะดวกนัก ฉะนั้นหากเราสามารถหาสูตรลัดซึ่งเป็นเครื่องมือช่วยที่มีความเหมาะสมในการคำนวณหาผลลัพธ์ของจำนวนที่มีจำนวนหลักมากๆ ได้ ก็จะเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นนั่นเอง

สำหรับการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตบางอย่างของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดดเดียวกันนั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ซึ่งนิยามใน (1) สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ ด้วยสัญลักษณ์ $a = {}_q r$ เมื่อ r และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \le r < 10$ และจะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน สำหรับทุกจำนวนเต็ม n เช่น $\#(2)$ แทนจำนวนของเลขโดด 2 ที่เรียงติดกัน เช่น $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=7} = 2222222$ ฉะนั้น $\#(n)$ จึงเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีความหมาย ทำให้ได้ว่า $\#(n)+1$ จึงเป็นจำนวนเต็มบวกด้วย สำหรับการศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n})^2 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m แทนเลขโดดหลักสิบและ n แทนเลขโดดหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+n \le 9$ จะได้ว่า

$$mn \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k} = m\underbrace{(m+n)(m+n)\ldots(m+n)}_{\#(m+n)=k-1}n$$

กำหนดให้ m แทนเลขโดดหลักสิบ และ n แทนเลขโดดหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+1=t, m+n = {}_r s$ และ $10 \le m+n \le 18$ จะได้ว่า

$$mn\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}=(m+1)\underbrace{(r+s)(r+s)\ldots(r+s)}_{\#(r+s)=k-2}sn$$

แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด $3,\ 9$) กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด $3,\ 9$) โดยได้พบว่า ผลบวกของผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n})^2+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}\ ,\ (\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

และ $(\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n})^2+\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$

รุ่งธิวา ธิลาใจ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 9 กับจำนวนหนึ่งหลัก โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และ m ซึ่ง $1\le m\le 9$ และกำหนดให้ $9\times m={}_q r$ โดยที่ $0\le q\le 8$ และ $0\le r\le 9$ จะได้ว่า

$$\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}\times m=q\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}r$$

นิคม หวลอารมณ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน โดยในกรณีเฉพาะเป็นจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 นั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n และ p เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=p}\times n=\underbrace{nnn\ldots n}_{\#(n)=p}\ \text{และ}\ \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=p}\times(-n)=\underbrace{(-n)(-n)(-n)\ldots(-n)}_{\#(-n)=p}$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ q,p,s และ r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qpsr={}_q p\|_s r$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n\ge 2$ จะได้ว่า

$$ {}_q p \|_s r \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = {}_q p\, {}_q p \underbrace{({}_q p(\boxplus_s r)({}_q p(\boxplus_s r)({}_q p(\boxplus_s r)\ldots({}_q p(\boxplus_s r)}_{\#({}_q p(\boxplus_s r)=n-2} {}_s r\, {}_s r $$

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่าความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$ \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n} = 9 \times (123\ldots(n-3)(n-2)(n-1)) + n $$

กรกนก ชุมภูรัตน์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$ n \times 9 \times \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=m} = (n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n) $$

จากการสังเกตเช่นเดียวกับอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) เราพบความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจและมีลักษณะที่สวยงามของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ฉะนั้น บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนสำหรับการคำนวณหาผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 และหากเราสามารถหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ก็จะเป็นการแสดงให้เห็นถึงความสวยงามทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาผลลัพธ์นี้ด้วย โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) Clark (2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$ a = b \cdot q + r \quad \text{และ} \quad 0 \leq r < |b| $$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) Clark (2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้ โดยดูการศึกษาของจำนวนเศษเหลือได้จากอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) และณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555)

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) และณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (Remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b = 10$ ทำให้ได้ว่ามีจำนวนเต็ม q (ผลหาร) และ r (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \le r < 10$ ฉะนั้น r เป็นเลขโดดนั่นเอง นิยามจำนวนเศษเหลือสำหรับจำนวนเต็ม a โดย

$$a := {}_q r \tag{1}$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 60 = {}_6 0 & 180 = {}_{18} 0 & 200 = {}_{20} 0 \\
1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 61 = {}_6 1 & 181 = {}_{18} 1 & 201 = {}_{20} 1 \\
2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 62 = {}_6 2 & 182 = {}_{18} 2 & 202 = {}_{20} 2 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 69 = {}_6 9 & 189 = {}_{18} 9 & 209 = {}_{20} 9
\end{array}$$

และ

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -60 = {}_{-6} 0 & -180 = {}_{-18} 0 & -200 = {}_{-20} 0 \\
-1 = {}_{-1} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -61 = {}_{-7} 9 & -181 = {}_{-19} 9 & -201 = {}_{-21} 9 \\
-2 = {}_{-1} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -62 = {}_{-7} 8 & -182 = {}_{-19} 8 & -202 = {}_{-21} 8 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
-9 = {}_{-1} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -69 = {}_{-7} 1 & -189 = {}_{-19} 1 & -209 = {}_{-21} 1
\end{array}$$

จากอภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) จะได้ว่าการแปลงจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ ทำได้ดังนี้

$$ {}_{q_n}r_n\, {}_{q_{n-1}}r_{n-1} \cdots {}_{q_3}r_3\, {}_{q_2}r_2\, {}_{q_1}r_1 = q_n(r_n + q_{n-1})\ldots(r_3+q_2)(r_2+q_1)r_1 $$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เพื่อความสะดวก เราเขียนจำนวนเศษเหลือ ${}_0r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r โดยที่ $0 \le r < 10$ เช่น ${}_01 = 1$, ${}_05 = 5$ และ ${}_09 = 9$ เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่ตัวเลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่ตัวเลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกจำนวนปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_qr$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยจำนวน 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $9\,{}_{14}9\,{}_{-4}17\,{}_{30}6\,{}_{-13}4\,{}_{26}509$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
9\,{}_{14}9\,{}_{-4}17\,{}_{30}6\,{}_{-13}4\,{}_{26}509 &= (9+14)(9+(-4))(17+30)(6+(-13))(4+26)509 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= (23)5(47)(-7)(30)509 \\
&= {}_2 3 5\,{}_4 7\,{}_{-1}3\,{}_3 0509 && \text{(จาก (1))}\\
&= (0+2)3(5+4)(7+(-1))(3+3)0509 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 239660509
\end{aligned}
$$

ในการศึกษาหัวข้อถัดไป จะแสดงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่พบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย

ข้อสังเกตและทฤษฎีบทที่ได้รับ

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ทำให้เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจและแสดงให้เห็นถึงความสวยงาม ดังนี้

กรณีที่ 1 : $\#(2)=\#(5)$

$$
\begin{aligned}
2\times 5 &= 10 \\
22\times 55 &= 1210 \\
222\times 555 &= 123210 \\
2222\times 5555 &= 12343210 \\
22222\times 55555 &= 1234543210 \\
222222\times 555555 &= 123456543210 \\
2222222\times 5555555 &= 12345676543210 \\
22222222\times 55555555 &= 1234567876543210 \\
222222222\times 555555555 &= 123456789876543210
\end{aligned}
\tag{2}
$$

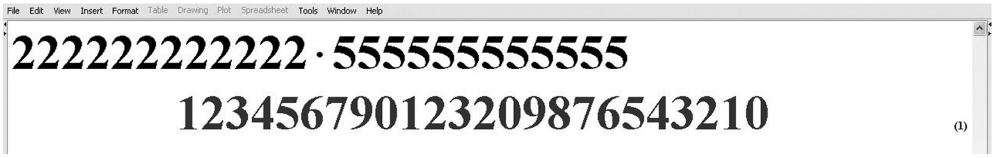
จากความสัมพันธ์ (2) เราสังเกตเห็นว่าผลคูณของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$ กับ $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots,9$ จะมีความสัมพันธ์กับผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}=123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots3210 \quad \text{เมื่อ} \quad n=1,2,3,\ldots,9$$

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=12}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=12}$ สามารถคำนวณหาได้อย่างถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (2) ที่เราพบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=12}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=12} &= 123456789(10)(11)(12)(11)(10)9876543210 && \text{(จาก (2))} \\
&= 123456789_1 0_1 1_1 2_1 1_1 09876543210 && \text{(จาก (1))} \\
&= 12345678(10)123209876543210 && \text{(บวกทแยง)} \\
&= 12345678_1 0123209876543210 && \text{(จาก (1))} \\
&= 1234567901232098765432\,10 && \text{(บวกทแยง)}
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=12}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=12}$

กรณีที่ 2 : $\#(2)=\#(5)+1$

$$\begin{array}{rcl}
22\times5 & = & 110 \\
222\times55 & = & 12210 \\
2222\times555 & = & 1233210 \\
22222\times5555 & = & 123443210 \\
222222\times55555 & = & 12345543210 \\
2222222\times555555 & = & 1234566543210 \\
22222222\times5555555 & = & 123456776543210 \\
222222222\times55555555 & = & 12345678876543210 \\
2222222222\times555555555 & = & 1234567899876543210
\end{array} \tag{3}$$

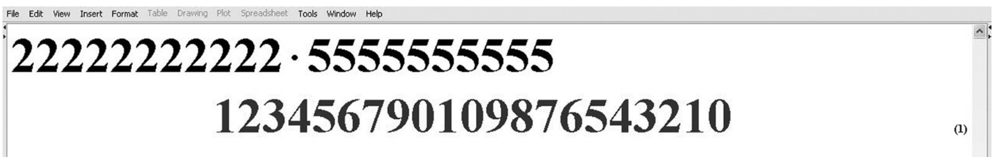
จากความสัมพันธ์ (3) เราสังเกตเห็นว่าผลคูณของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n+1}$ กับ $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots,9$ จะมีลักษณะเป็นจำนวนที่เลขโดดเรียงกัน ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$\underbrace{222...2}_{\#(2)=n+1}\times\underbrace{555...5}_{\#(5)=n}=123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210 \quad \text{เมื่อ} \quad n=1,2,3,\ldots,9$$

ตัวอย่าง 2 ผลลัพธ์ของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=11}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=10}$ สามารถคำนวณหาได้อย่างถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (3) ที่เราพบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=11}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=10} &= 123456789(10)(10)9876543210 && \text{(จาก (3))}\\
&= 123456789_1 0_1 09876543210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 12345678(10)109876543210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 12345678_1 0109876543210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 12345679010987654321 0 && \text{(บวกทแยง)}
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=11}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=10}$

กรณีที่ 3 : $\#(5)=\#(2)+1$

$$
\begin{aligned}
55\times2 &= 110\\
555\times22 &= 12210\\
5555\times222 &= 1233210\\
55555\times2222 &= 123443210\\
555555\times22222 &= 12345543210 \qquad (4)\\
5555555\times222222 &= 1234566543210\\
55555555\times2222222 &= 123456776543210\\
555555555\times22222222 &= 12345678876543210\\
5555555555\times222222222 &= 1234567899876543210
\end{aligned}
$$

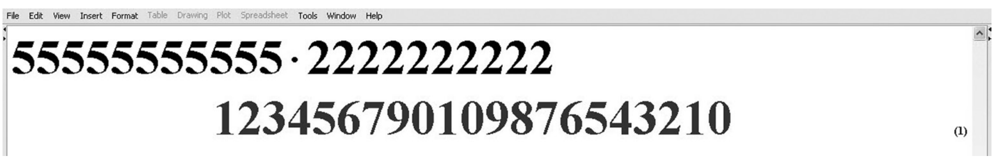
จากความสัมพันธ์ (4) เราสังเกตเห็นว่าผลคูณของ $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n+1}$ กับ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots,9$ จะมีลักษณะเป็นเป็นจำนวนที่เลขโดดเรียงกัน และเท่ากับผลคูณของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n+1}$ กับ $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}$ ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n+1}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n} = 123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210 \quad \text{เมื่อ} \quad n=1,2,3,\ldots,9$$

ตัวอย่าง 3 ผลลัพธ์ของ $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=11}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=10}$ สามารถคำนวณหาได้อย่างถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (4) ที่เราพบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=11}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=10} &= 123456789(10)(10)9876543210 && \text{(จาก (4))}\\
&= 123456789_{1}0_{1}09876543210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 12345678(10)109876543210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 12345678_{1}0109876543210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 12345679010987654321\,0 && \text{(บวกทแยง)}
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=11}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=10}$

จากข้อสังเกตและตัวอย่างข้างต้น เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ทั้งสามกรณีได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ทั้งสามกรณีได้ แล้วรูปแบบทั่วไปที่ได้นี้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ที่เราพบหรือไม่

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ สามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อของเรา พร้อมทั้งให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทและตรวจคำตอบที่ได้จากทฤษฎีบทด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ทฤษฎีบท 3 อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n})^2 = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321 \tag{5}$$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n} = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots3210 \tag{6}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\underbrace{222...2}_{\#(2)=n}\times\underbrace{555...5}_{\#(5)=n} &= 2\times(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n})\times5\times(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n})\\ &= 10\times(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n})^2\\ &= 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots3210 \qquad \text{(ทฤษฎีบท 3)}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n} = 123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots3210$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n $\square$

ทฤษฎีบท 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n+1}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n} = 123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210 \tag{7}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n+1}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n} = 123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $22\times5=110$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k+1}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=k} = 123\ldots(k-1)kk(k-1)\ldots3210$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k+2}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=k+1} &= 2\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+2}\times5\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1} \\
&= 2\times5\times(10^{k+1}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1})\times(10^{k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}) \\
&= 2\times5\times[(10^{k+1}\times10^{k})+(10^{k+1}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k})+(10^{k}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1})+(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k})] \\
&= 10\times[10^{2\cdot k+1}+(10^{k}\times(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}0+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k+1}))]+(\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k+1}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=k}) \\
&= 10\times[10^{2\cdot k+1}+(10^{k}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}1)]+123\ldots(k-1)kk(k-1)\ldots3210 \quad \text{(สมมติฐาน)} \\
&= 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k+2}+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k+1}+123\ldots(k-1)kk(k-1)\ldots3210 \\
&= 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k+2}+2345\ldots(k+1)(k+1)k(k-1)\ldots3210 \\
&= 12345\ldots(k+1)(k+1)k(k-1)\ldots3210 \\
&= 123\ldots k(k+1)(k+1)k\ldots3210
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n+1}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}=123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

ทฤษฎีบท 6 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n+1}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210 \tag{8}$$

การพิสูจน์ ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 5 □

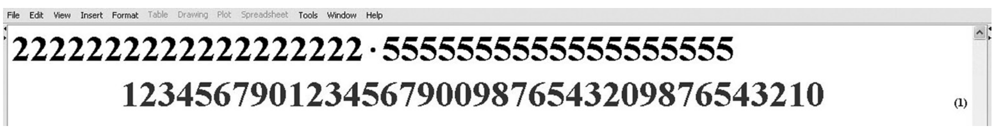
จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=19}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=19}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=19}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=19} &= 123\ldots(18)(19)(18)\ldots3210 && \text{(ทฤษฎีบท 4)}\\
&= 123\ldots{}_{1}8_{1}9_{1}8\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 123\ldots8(10)123456789(10)9876543209\ldots3210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 123\ldots8_{1}0123456789_{1}09876543209\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 123\ldots79012345678(10)09876543209\ldots3210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 123\ldots79012345678_{1}009876543209\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 1234567901234567900987654320987654321 0 && \text{(บวกทแยง)}
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์ดังภาพที่ 4



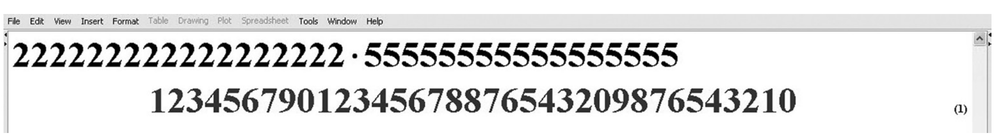
ภาพที่ 4 $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=19}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=19}$

ตัวอย่าง 5 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=18}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=17}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=18}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=17} &= 123\ldots(16)(17)(17)(16)\ldots3210 && \text{(ทฤษฎีบท 5)}\\
&= 123\ldots{}_{1}6_{1}7_{1}7_{1}6\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 123\ldots8(10)12345678876543209\ldots3210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 123\ldots8_{1}012345678876543209\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 1234567901234567887654320987654321 0 && \text{(บวกทแยง)}
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์ดังภาพที่ 5



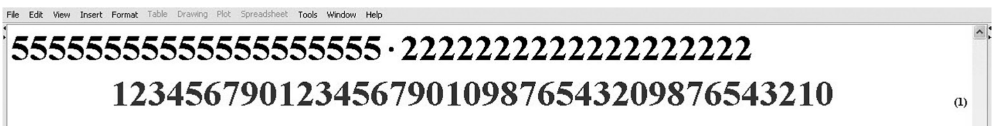
ภาพที่ 5 $\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=18}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=17}$

ตัวอย่าง 6 จงหาผลลัพธ์ของ $\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=20}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=19}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=20}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=19} &= 123\ldots(18)(19)(19)(18)\ldots3210 && \text{(ทฤษฎีบท 6)}\\
&= 123\ldots{}_18_19_19_18_1\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 123\ldots8(10)123456789(10)(10)9876543209\ldots3210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 123\ldots8_10123456789_10_109876543209\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 123\ldots79012345678(10)109876543209\ldots3210 && \text{(บวกทแยง)}\\
&= 123\ldots79012345678_10109876543209\ldots3210 && \text{(จาก (1))}\\
&= 1234567901234567901098765432098765432 10 && \text{(บวกทแยง)}
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์ดังภาพที่ 6



ภาพที่ 6 $\underbrace{555...5}_{\#(5)=20}\times\underbrace{222...2}_{\#(2)=19}$

อภิปรายผล

จากการศึกษาผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ทั้งสามกรณีได้ดังนี้

กรณีที่ 1 : $\#(2)=\#(5)$ ได้ผลการศึกษาตามทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}=123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots3210 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

กรณีที่ 2 : $\#(2)=\#(5)+1$ ได้ผลการศึกษาตามทฤษฎีบท 5 ดังนี้

$$\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n+1}\times\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n}=123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

กรณีที่ 3 : $\#(5)=\#(2)+1$ ได้ผลการศึกษาตามทฤษฎีบท 6 ดังนี้

$$\underbrace{555\ldots5}_{\#(5)=n+1}\times\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=123\ldots(n-1)nn(n-1)\ldots3210 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

(2) รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ทั้งสามกรณีนั้นมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (2), (3) และ (4)

จากข้อสังเกตข้างต้นจนกระทั่งได้มาซึ่งรูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 ทั้งสามกรณีนั้น นับว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (Generalization) จากข้อสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ (1) ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 2 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 5 เป็นอีก **ความสวยงามวางนัยทั่วไป** (Generalized beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง และยังเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เราหาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็วและสะดวกมากขึ้น จากบทความนี้และบทความอื่นๆ ที่ได้กล่าวถึงผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่า จำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่างๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าน่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่างๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้วผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปแบบทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

กรกนก ชุมภูรัตน์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9. *วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา, 7*(1), อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุ๊ปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา, 6*(1), 25-30.

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารวิจัยมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม, 8*(15-16), 1-10.

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร, 5*(10), 61-71.

นิคม หวลอารมณ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน. *วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ, 16*(1), 51-58.

รุ่งธิวา ธิลาใจ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 9 กับจำนวนหนึ่งหลัก. *วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา, 5*(2), 71-80.

แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6. *วารสารวิทยาศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี, 9*(1), 80-90.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไปทฤษฎีบท 6 : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. *วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์, 8*(2), 48-58.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารนเรศวรพะเยา, 4*(2), 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข, 41*(4), 919-927.

Clark, W. E. (2002). *Elementary Number Theory.* Retrieved November 7, 2014, from: http://shell.cas.usf.edu/~wclark/elem_num_th_book.pdf.