



ผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญา
ที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

The Effect of Using Proof Formats Incorporating with Cognitive and Metacognitive
Reading Strategies on Reading Comprehension of Geometry Proof

ปาริชาติ ภูภักดี และเสาวภาคย์ วงษ์ไกร*

Parichart Poophakdee and Saowaphak Wongkrai*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา อำเภอเมือง จังหวัดยะลา 42000

Program in Mathematics, Faculty of Education, Loei Rajabhat University, Muang, Loei 42000, Thailand

*Corresponding author, e-mail: saowaphak.suw@lru.ac.th

(Received: Dec 1, 2022; Revised: May 5, 2023; Accepted: May 8, 2023)

บทคัดย่อ

การพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นเรื่องที่สำคัญในหลักสูตรคณิตศาสตร์ นักเรียนยังมีปัญหาการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แม้แต่นักศึกษาที่เรียนหลักสูตรคณิตศาสตร์ขั้นสูงในระดับมหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งก็ไม่สามารถเข้าใจการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ การวิจัยนี้เป็นการศึกษาวิจัยกึ่งทดลอง กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้น จำนวน 56 คน เป็นกลุ่มทดลอง 28 คน และกลุ่มควบคุม 28 คน โดยการเลือกแบบเจาะจง กลุ่มทดลองใช้รูปแบบการพิสูจน์ 3 แบบ (แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงาน) ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญา และกลุ่มควบคุมใช้รูปแบบการพิสูจน์เฉพาะการพิสูจน์แบบความเรียงเป็นย่อหน้า เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยทั้งสองกลุ่มมีการทดสอบความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนและหลังเรียน วิเคราะห์ข้อมูลด้วยสถิติพรรณนาและสถิติทดสอบที ผลการวิจัยพบว่า คะแนน $N - gain$ แสดงให้เห็นว่ากลุ่มทดลองมีพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตดีขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ และการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับการใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาจะช่วยสนับสนุนให้นักศึกษาเข้าใจเกี่ยวกับมุมมองด้านพื้นฐานความรู้ สถานะเชิงตรรกะ การสรุป ลักษณะทั่วไป และการนำไปใช้ และแนวคิดที่สำคัญในการพิสูจน์ การวิจัยนี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของการใช้รูปแบบการพิสูจน์หลายรูปแบบร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาเพื่อส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์

คำสำคัญ : รูปแบบการพิสูจน์ ความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญา

Abstract

Geometry proof is an important topic in the mathematics curriculum. Students have difficulty using geometry proofs. Even students who take several university-level advanced mathematics courses are unable to understand geometric proofs. This research aimed to study the effect of using proof formats incorporating cognitive and metacognitive reading strategies on the reading comprehension of geometry proof of pre-service mathematic teachers. The participants were 56 students of Mathematic, Faculty of Education, Loei Rajabhat University, in fundamental geometry. There were 28 students in the experimental group and 28 students in the control group by purposive sampling method. They participated in this quasi-experimental study. While the experimental group was instructed in three proof formats (paragraph proof, two-column proof, and flow-chart proof) with cognitive and metacognitive reading strategies, the control group was instructed in only the paragraph proof format. The instruments for data collection were reading comprehension of geometry proof ability tests. Both groups had the pre-



test and post-tests of reading comprehension of geometry proof ability. The data were analyzed by descriptive statistics and t-tests. The results of the research showed that N-gain scores showed significantly more improvement in students' RCGP in the experimental group. The proof formats with cognitive and metacognitive reading strategies support the students' understanding of the facets of basic knowledge, logical status, summarization, generality and application, and the critical ideas in the proof. This research shows the benefits of offering multiple proof formats with cognitive and metacognitive reading strategies to support pre-service mathematic teachers' RCGP.

Keywords: Proof formats, Reading comprehension of geometry proof,
 Cognitive and metacognitive reading strategies

บทนำ

การจัดการศึกษาสาขาครุศาสตร์และสาขาศึกษาศาสตร์ (หลักสูตรสี่ปี) กลุ่มสาขาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษามีเป้าหมาย คือ ให้ผู้เรียนมีความรู้เกี่ยวกับหลักการ แนวคิด ทฤษฎี เนื้อหาสาระคณิตศาสตร์และโครงสร้างนามธรรมที่ถูกกำหนดขึ้นผ่านทางกลุ่มของสัจพจน์ซึ่งมีการให้เหตุผลที่แน่นอนโดยใช้ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์และสัญกรณ์คณิตศาสตร์ (Ministry of Education, 2019) การสร้างความถูกต้องของการให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญต่อการเข้าใจ วิธีการสร้างความถูกต้องที่เป็นวิธีมาตรฐาน คือ การพิสูจน์ ซึ่งการพิสูจน์มีความสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์และถือเป็นหัวใจสำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในประเทศไทยหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ได้กำหนดให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาเรียนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น การพิสูจน์ในทางเรขาคณิต หลักการพิสูจน์เบื้องต้น ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น เป็นต้น เมื่อเข้าศึกษาในระดับอุดมศึกษา นักศึกษาคณิตศาสตร์ หลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ.2562 (หลักสูตร 4 ปี) จำเป็นต้องศึกษาคณิตศาสตร์ในลักษณะที่เกี่ยวข้องกับวิธีการพิสูจน์ในรูปแบบต่าง ๆ ทั้งรายวิชาหมวดวิชาเฉพาะด้าน กลุ่มวิชาเอกบังคับ นอกจากนี้ยังมีรายวิชากลุ่มวิชาเอกเลือกอีกหลายวิชาที่ต้องศึกษาทฤษฎีโดยอาศัยการพิสูจน์เพื่อประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้ในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา มีการเรียนการสอนรายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นซึ่งเรขาคณิตถือว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ โดยการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมุ่งเน้นให้นักศึกษาคณิตศาสตร์สามารถทำความเข้าใจในการพิสูจน์ สร้างการพิสูจน์ และนำไปใช้ในบริบทอื่น ๆ ความเข้าใจในการพิสูจน์มีความเกี่ยวข้องกับความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ในตำราหรือเอกสารประกอบการบรรยาย หรือการแสดงให้เห็นระหว่าง การบรรยาย ซึ่งความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์เป็นการทำความเข้าใจการพิสูจน์จากองค์ประกอบที่สำคัญเพื่อให้รู้ว่าการพิสูจน์ทำงานอย่างไร สามารถพิสูจน์ได้หรือไม่ และมีเหตุผลใดสนับสนุนการพิสูจน์จึงจะทำให้การพิสูจน์นั้นถูกต้อง (Yang & Lin, 2008) ในปัจจุบันการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในชั้นเรียนส่วนใหญ่ผู้สอนจะอธิบายสัจพจน์ คำนิยาม นิยาม ทฤษฎีบท และแนวคิดทางเรขาคณิต นำเสนอการพิสูจน์ และสร้างการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จากประสบการณ์การสอนและการสังเกตในชั้นเรียนรายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นของผู้วิจัยพบว่า นักศึกษาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ประสบปัญหาความเข้าใจในการพิสูจน์เป็นลายลักษณ์อักษร ปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยครั้งเมื่อมีการเขียนการพิสูจน์แบบความเรียงเป็นย่อหน้าและแบบสองคอลัมน์ คือ การเริ่มต้นเขียนแสดงการพิสูจน์ การลำดับเหตุผลของการพิสูจน์ไม่เป็นระบบ การแยกแยะเหตุและผลจากข้อเสนอมิได้ และการระบุข้อความที่สนับสนุนข้อสรุปในช่วงกลางและช่วงสุดท้ายของการพิสูจน์ สอดคล้องกับ Klumbut (2013) ที่พบว่า การเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา นักเรียนไม่สามารถเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง นักเรียนไม่สามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิตมาใช้ในการให้เหตุผลในการพิสูจน์ได้ และนักเรียนไม่สามารถเขียนข้อความในการพิสูจน์ให้มีความสัมพันธ์และต่อเนื่องหรือเป็นลำดับขั้นตอน และ Brikshavana (2017) ที่พบว่า นักศึกษามีปัญหาในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์โดยนักศึกษาคาดความระมัดระวังในการเขียนการพิสูจน์และนักศึกษาไม่เข้าใจวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ ซึ่งนักศึกษาคณิตศาสตร์เหล่านี้จะต้องนำความรู้ไปใช้ในวิชาชีพของตนเองหากไม่มีประสบการณ์หรือความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เมื่อไปฝึกปฏิบัติการสอนในสถานศึกษา นักศึกษามักจะหลีกเลี่ยงการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเพราะไม่สามารถอธิบายลำดับขั้นตอนการพิสูจน์ได้โดยจะนำเสนอเฉพาะสมบัติ บทนิยาม และทฤษฎีบททางเรขาคณิตเท่านั้น (Program in Mathematics, 2021) อาจเป็นผลมาจากการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบัน



อาจารย์ผู้สอนยังเน้นการอธิบายการพิสูจน์โดยขาดกิจกรรมที่ส่งเสริมให้นักศึกษาเข้าใจการอ่านการพิสูจน์และลงมือพิสูจน์ด้วยตนเอง จะเห็นว่าปัญหาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์มีความสำคัญเป็นอย่างมากและมีความจำเป็นเร่งด่วนที่จะต้องแก้ไข ดังนั้น การเตรียมความพร้อมโดยการจัดประสบการณ์ให้กับนักศึกษาให้มีความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจึงเป็นสิ่งสำคัญเพื่อที่จะนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างมีประสิทธิภาพให้กับนักเรียนต่อไปในอนาคต

จากปัญหาข้างต้นผู้วิจัยจึงได้ศึกษาแนวคิด วิธีการ หรือแนวทางที่เหมาะสมสำหรับแก้ปัญหาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์พบว่า การจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่จะส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตและสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ได้ควรเน้นให้ผู้เรียนมีความรู้และเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ สมบัติ ลำดับเชิงตรรกะ การระบุขั้นตอนที่สำคัญในการพิสูจน์ โดยสามารถวางแผนการพิสูจน์ การตรวจสอบการใช้ตรรกศาสตร์ และประเมินเกี่ยวกับโครงสร้างของการพิสูจน์ โดย Yang & Lin (2008) ได้นำเสนอโมเดลความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Reading comprehension of geometry proof) หรือ RCGP แบ่งออกเป็น 4 ระดับ คือ ระดับ 1 (Surface) เป็นการเข้าใจข้อความ เงื่อนไข สัญลักษณ์ หรือตัวเลขในการพิสูจน์ ระดับ 2 (Recognizing elements) เป็นการใชตรรกศาสตร์ที่เหมาะสมในการพิสูจน์ข้อความ ระดับ 3 (Chaining element) เป็นความเข้าใจและการนำตรรกศาสตร์มาเชื่อมโยงระหว่างข้อความ และระดับ 4 (Encapsulation) เป็นการไตร่ตรองการพิสูจน์โดยพิจารณาแนวคิดหลัก วิธีการ และการประยุกต์ใช้การพิสูจน์ในบริบทอื่น ๆ ซึ่งมีการใช้รูปแบบการพิสูจน์ ได้แก่ แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ แบบต้นไม้ และแบบใช้ผังงาน สามารถช่วยสนับสนุนความเข้าใจในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Cirillo & Herbst, 2012) การศึกษาของ Miyazaki *et al.* (2015) แสดงให้เห็นว่าการใช้รูปแบบการพิสูจน์แบบใช้ผังงานเพื่อสร้างการพิสูจน์สามารถช่วยให้นักเรียนเข้าใจองค์ประกอบของการพิสูจน์และความสัมพันธ์เชิงตรรกะ และ Anwar *et al.* (2021) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้รูปแบบการพิสูจน์หลายรูปแบบ ได้แก่ แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงาน พร้อมทั้งระหว่างการจัดการจัดการกิจกรรมการพิสูจน์มีการใช้กลยุทธ์การอ่านการพิสูจน์ จากผลการศึกษาพบว่าการใช้รูปแบบการพิสูจน์ที่หลากหลายและมีการแทรกการใช้กลยุทธ์การอ่านการพิสูจน์ระหว่างการสอน จะช่วยสนับสนุนความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาให้ดีขึ้นเป็นไปตามโมเดลความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของ Yang & Lin (2008) โดยเฉพาะในมุมมองด้านสถานะเชิงตรรกะที่มีการใช้ตรรกศาสตร์ที่เหมาะสมในการพิสูจน์ข้อความ และอีกวิธีหนึ่งในการทำความเข้าใจการพิสูจน์ คือ การใช้วิธีการอ่านเพื่อความเข้าใจหรือการใช้กลยุทธ์การอ่านที่เหมาะสม ซึ่ง Yang (2012) ได้นำเสนอการใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาสำหรับความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยที่กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาเป็นการปฏิสัมพันธ์โดยตรงกับข้อความ การเริ่มต้นทำความเข้าใจ การอ่านข้อเสนอก่อน การขีดเส้นใต้ การคาดคะเนจากรูปภาพที่แนบมา การแยกและระบุลำดับขั้นตอนของการพิสูจน์ ส่วนกลยุทธ์การอ่านอภิปัญญาจำเป็นต้องมีการอ่านอย่างมีสติโดยการวางแผน การตรวจสอบและการติดตาม อย่างรอบคอบรวมถึงการมีเป้าหมายในใจ การระบุองค์ประกอบสำคัญของการพิสูจน์ การตรวจสอบความเข้าใจของตนเองหรือความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องและการคิดเกี่ยวกับทฤษฎีบท โดย Yang & Lin (2012) ได้ศึกษาการใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาของนักเรียนพบว่า การใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาส่งผลโดยตรงกับความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยที่กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาสามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์อย่างละเอียดและกลยุทธ์การอ่านอภิปัญญาสามารถนำมาใช้ในการวางแผนการพิสูจน์และตรวจสอบความเข้าใจในการเชื่อมโยงเชิงตรรกะและยังแนะนำให้ใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาเข้ามาในระหว่างการสอนการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จากการศึกษาเชิงประจักษ์ดังที่อธิบายไว้ทำให้ผู้วิจัยคาดว่า การใช้รูปแบบการพิสูจน์ที่หลากหลาย ได้แก่ แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงาน สามารถพัฒนาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ เหตุผลในการเลือก 3 รูปแบบนี้ คือ รูปแบบการพิสูจน์แบบความเรียงเป็นย่อหน้าและแบบสองคอลัมน์ปรากฏในหนังสือเรียน ตำรา และเอกสารประกอบการบรรยายของประเทศไทย การพิสูจน์แบบใช้ผังงานสามารถแสดงการเชื่อมโยงเชิงตรรกะระหว่างข้อเสนอก่อนและข้อสรุป (Miyazaki *et al.*, 2015) และการพิสูจน์แบบต้นไม้คล้ายกับการพิสูจน์โดยใช้ผังงาน (Cirillo & Herbst, 2012) รวมถึงผู้วิจัยได้ระบุปัจจัยที่สามารถส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ ได้แก่ กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาและวิธีการสอน โดยรวมทั้งรูปแบบการพิสูจน์หลายรูปแบบและปัจจัยที่ช่วยส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในการออกแบบการจัดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยใช้ในการศึกษาครั้งนี้

จากความสำคัญ ปัญหา และแนวคิดดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยเห็นถึงความสำคัญในการส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตให้กับนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานและเป็นหัวใจสำคัญในการเรียนและการสอน

คณิตศาสตร์ สามารถนำไปต่อยอดในการเรียนการสอนระดับชั้นประถมศึกษาและมัธยมศึกษาได้ ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะศึกษาผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อต้องการนำเสนอแนวทางอีกแนวทางหนึ่งในการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สนับสนุนให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพและนักศึกษาเกิดประสิทธิผล เกิดความเข้าใจและสนใจเรียนมากยิ่งขึ้น รวมถึงนักศึกษาคณิตศาสตร์ยังสามารถนำแนวทางการเรียนการสอนนี้ไปพัฒนาวิชาชีพของตนต่อไปได้

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการวิจัย

แบบแผนการทำวิจัย การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi-experimental research) รูปแบบ Non-equivalent control group pretest-posttest only design โดยแบบแผนการวิจัยมีลักษณะดังนี้

ตารางที่ 1 แบบแผนการวิจัย

กลุ่มเป้าหมาย	การทดสอบก่อนการทดลอง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
E	ความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต	X	ความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
C	ความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต	~X	ความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

สัญลักษณ์ในแบบแผนการวิจัย

- E แทน กลุ่มทดลอง
C แทน กลุ่มควบคุม
X แทน การจัดการเรียนรู้รายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์ 3 แบบ คือ แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงานร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญา
~X แทน การจัดการเรียนรู้รายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นแบบปกติโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์เฉพาะแบบความเรียงเป็นย่อหน้า

กลุ่มเป้าหมาย กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา 1152501 เรขาคณิตเบื้องต้น ภาคเรียนที่ 1/2565 จำนวน 56 คน ซึ่งการกำหนดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยการเลือกแบบเจาะจง ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลอง จำนวน 28 คน และกลุ่มควบคุม จำนวน 28 คน

เนื้อหาที่ใช้ การวิจัยครั้งนี้ใช้เนื้อหาในรายวิชา 1152501 เรขาคณิตเบื้องต้น ตามหลักสูตรครุศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2562 (หลักสูตร 4 ปี) เรื่อง รูปสามเหลี่ยมสมภาคและการประยุกต์ใช้เส้นขนาน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย แบ่งเป็น 2 ชนิด คือ

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1.1 แผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้น เรื่อง รูปสามเหลี่ยมสมภาคและการประยุกต์ใช้เส้นขนาน โดยสร้างขึ้นจากการศึกษาเอกสาร งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง คำอธิบายรายวิชา และรายละเอียดของรายวิชา (มคอ.3) ซึ่งการพิสูจน์ทางเรขาคณิตใช้รูปแบบการพิสูจน์ 3 แบบ คือ แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงานร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญา จำนวน 6 แผน จากนั้นนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านตรวจสอบความเหมาะสม ประกอบด้วยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ การสอนคณิตศาสตร์หรือคณิตศาสตร์ศึกษา และการวัดและประเมินผล เกณฑ์การตัดสินผลการประเมิน คือ ใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยไม่ต่ำกว่า 3.50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่เกิน 1.00 ถือว่าแผนการจัดการเรียนรู้มีความเหมาะสมพบว่า มีค่าความเหมาะสมโดยเฉลี่ย 4.19 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานโดยเฉลี่ย เท่ากับ 0.70 ซึ่งจัดว่ามีความเหมาะสมในระดับมากและสามารถนำไปใช้ได้ ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ และนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปทดลองใช้กับกลุ่มที่คล้ายกับกลุ่มเป้าหมายซึ่งเป็นกลุ่มที่ยัง

ไม่ได้เรียนรายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นพบว่า ระยะเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมไม่เพียงพอจึงมีการปรับกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับเวลายิ่งขึ้น แต่แผนการจัดการเรียนรู้มีรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจ อาจารย์ผู้สอนแนะนำและอธิบาย โดยการสอนมุ่งเน้นไปที่การทำความเข้าใจเกี่ยวกับสัจพจน์ คำนิยาม บทนิยาม และแนวคิดทางเรขาคณิต

ขั้นที่ 2 สร้างการพิสูจน์และใช้กลยุทธ์การอ่าน อาจารย์ผู้สอนกำหนดการพิสูจน์แบบใช้ผังงานให้เป็นปัญหาปลายเปิด ให้นักศึกษาเป็นผู้กำหนดหลักฐานที่เหมาะสมพร้อมหาข้อสรุปที่เป็นไปได้มากกว่า 1 ข้อ เติมข้อความลงในช่องว่างที่กำหนดให้ในการพิสูจน์แบบใช้ผังงาน จากนั้นนักศึกษาใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปรายเพื่อชี้แจงการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตดังที่ระบุไว้ในตารางที่ 2-3 สำหรับอ่านการพิสูจน์แบบใช้ผังงานที่ตนเองสร้างไว้

ขั้นที่ 3 แปลงการพิสูจน์ นักศึกษานำการพิสูจน์แบบใช้ผังงานที่ตนเองได้สร้างไว้มาเขียนให้อยู่ในรูปการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์และแบบความเรียงเป็นย่อหน้า

ขั้นที่ 4 การนำไปใช้ นักศึกษาเปลี่ยนข้อเสนอมุมเรขาคณิตใหม่แล้วสร้างการพิสูจน์แบบใช้ผังงาน แปลงให้อยู่ในรูปการพิสูจน์แบบสองคอลัมน์และแบบความเรียงเป็นย่อหน้าและอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน

ตารางที่ 2 รายการกลยุทธ์การอ่านทางปัญญา (Yang, 2012)

รายการกลยุทธ์การอ่านทางปัญญา	
C1	C2
ฉันอ่านข้อเสนอมุมเรขาคณิตก่อน	ฉันระบุขั้นตอนสำคัญจากข้อความพิสูจน์
ฉันพยายามคาดเดาและสรุปจากตัวเลข	ฉันขีดเส้นใต้ (หรือวงกลม) สมบัติหรือคำจำกัดความในข้อความ
ฉันพยายามอ่านต่อไปเพื่อดูว่ามีขั้นตอนอย่างไรบ้าง	ฉันขีดเส้นใต้ (หรือวงกลม) ขั้นตอนสำคัญในการพิสูจน์
ฉันวาดรูปภาพเพื่อเสริมความเข้าใจ	ฉันนับขั้นตอนการพิสูจน์เพื่อจัดระเบียบกระบวนการพิสูจน์
ฉันกำหนดสัญลักษณ์ให้สอดคล้องกับข้อความที่พิสูจน์	

ตารางที่ 3 รายการกลยุทธ์การอ่านอภิปราย (Yang, 2012)

รายการกลยุทธ์การอ่านอภิปราย		
M1	M2	M3
ฉันคิดเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์หลังจากอ่านข้อเสนอมุมเรขาคณิต	ฉันระบุสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ก่อนที่จะอ่านการพิสูจน์ทั้งหมด	ฉันพิจารณาความถูกต้องของข้อเสนอมุมเรขาคณิต
ฉันพยายามมองย้อนกลับไปที่ข้อเสนอมุมเรขาคณิต	ฉันพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นตอนการพิสูจน์	ฉันคิดเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้ข้อเสนอมุมเรขาคณิต
ฉันเพิ่มความเข้าใจ	ฉันถามตัวเองว่าการพิสูจน์เริ่มต้นและสรุปได้อย่างไร	การเปลี่ยนแปลงข้อเสนอมุมเรขาคณิต
ฉันพยายามคิดในสิ่งที่ไม่เข้าใจ	ฉันถามตัวเองว่าส่วนใดบ้างที่ฉันยังไม่เข้าใจ	
ฉันอ่านข้อความและอ่านอย่างระมัดระวัง	ฉันถามตัวเองเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขกับขั้นตอนการพิสูจน์	
ฉันอ่านสมบัติของการพิสูจน์		
ฉันระบุสิ่งที่กำหนดให้ก่อนที่จะอ่านการพิสูจน์ทั้งหมด		
ฉันระบุขั้นตอนที่สำคัญในข้อความ		
ฉันจะอ่านข้อความทีละขั้นตอน		

1.2 แผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นแบบปกติ เรื่อง รูปสามเหลี่ยมสมภาคและการประยุกต์ใช้เส้นขนาน จำนวน 6 แผน แต่แผนการจัดการเรียนรู้มีรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังนี้

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจ อาจารย์ผู้สอนแนะนำและอธิบาย ซึ่งการสอนมุ่งเน้นไปที่การทำความเข้าใจเกี่ยวกับสัจพจน์ คำนิยาม บทนิยาม และแนวคิดทางเรขาคณิต

ขั้นที่ 2 สร้างการพิสูจน์และการอ่านการพิสูจน์ อาจารย์ผู้สอนแนะนำและสาธิตการพิสูจน์ทฤษฎีบทหรือข้อเสนอมุมเรขาคณิตแบบความเรียงเป็นย่อหน้า มีการถาม-ตอบระหว่างการทำกิจกรรม อาจารย์กำหนดข้อเสนอมุมเรขาคณิตแล้วให้นักศึกษาสร้างการพิสูจน์แบบความเรียงและอ่านการพิสูจน์แบบความเรียงเป็นย่อหน้าที่ตนเองสร้างขึ้นโดยการพิจารณาถึงความสมเหตุสมผลระหว่างข้อเสนอมุมเรขาคณิต การอ้างเหตุผล และข้อสรุป

ขั้นที่ 3 การนำไปใช้ อาจารย์เปลี่ยนข้อเสนอมุมเรขาคณิตใหม่แล้วให้นักศึกษาสร้างการพิสูจน์แบบความเรียงเป็นย่อหน้า



และอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

แบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สร้างขึ้นโดยการศึกษาหลักสูตร เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และรายละเอียดของรายวิชา (มคอ.3) โดยมีโครงสร้างของแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตซึ่งปรับปรุงมาจาก Yang & Lin (2008) ประกอบด้วยการวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านพื้นฐานความรู้ (B) สถานะเชิงตรรกะ (L) การสรุป (S) ลักษณะทั่วไป (G) และการนำไปใช้ (A) โดยการปรับปรุงขึ้นอยู่กับบริบทของผู้เรียนและเนื้อหาของรายวิชา ประกอบด้วย 1) คำถามบางคำถามปรับเป็นคำถามแบบเปิด 2) ปัญหาที่ต้องการพิสูจน์ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมปรับให้เข้ากับเนื้อหาของหลักสูตร 3) การพิสูจน์จะนำเสนอในรูปแบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงาน ผู้วิจัยสร้างข้อสอบทั้งหมด 2 ข้อ ใช้จริง 1 ข้อ แต่ละข้อมี 12 รายการคำถาม ซึ่งคำถามที่ 2 5 8 9 11 และ 12 จะมีคำตอบเป็น “ใช่” หรือ “ไม่ใช่” “เห็นด้วย” หรือ “ไม่เห็นด้วย” และคำถามที่ 1 3 4 6 7 และ 10 จะเป็นคำถามที่ต้องการคำอธิบาย นำแบบวัดแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ซึ่งผลการประเมินหาค่าดัชนีความสอดคล้องพบว่า อยู่ในช่วง 0.67-1.00 แสดงว่า มีแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่สามารถวัดได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ทั้งหมด 2 ข้อ จากนั้น นำแบบวัดแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้กับกลุ่มที่คล้ายกับกลุ่มเป้าหมาย ผู้วิจัยได้ทำการเลือกแบบวัดแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จำนวน 1 ข้อ โดยที่แต่ละข้อคำถามมีความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.50 – 0.75 ค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.37-0.62 และค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.76

การเก็บรวบรวมข้อมูล ผู้วิจัยให้นักศึกษาทั้งสองกลุ่มทำแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนแล้วนำมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์การให้คะแนนที่ได้กำหนดไว้เพื่อนำคะแนนจากการทำแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมาทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบที (Independent sample t-test) พบว่า คะแนนจากการทำแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มก่อนเรียนไม่แตกต่างกัน ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม โดยกลุ่มทดลองสอนด้วยแผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นที่ใช้รูปแบบการพิสูจน์ 3 แบบ คือ แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงานร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญา และกลุ่มควบคุมสอนด้วยแผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นแบบปกติ ทำการสอนนักศึกษาทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 6 แผน รวมระยะเวลาในการจัดการเรียนรู้ทั้งสิ้น 6 คาบ (คาบละ 4 ชม.) เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วผู้วิจัยให้นักศึกษาทั้งสองกลุ่มทำแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดและทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธีการทางสถิติ

การวิเคราะห์ข้อมูล สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลของแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนและหลังเรียน คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานในการวิเคราะห์ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม คือ สถิติทดสอบที (Independent sample t-test) และใช้คะแนน N-gain เพื่ออธิบายพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตและพัฒนาการในแต่ละมุมมองของความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้สูตรของ Hake (2002) ซึ่งเกณฑ์พัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแสดงดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ระดับของคะแนน N-gain (Hake, 1998)

ช่วงคะแนน $\langle g \rangle$	เกณฑ์พัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
$\langle g \rangle \geq .7$	ระดับสูง
$.3 \leq \langle g \rangle < .7$	ระดับปานกลาง
$\langle g \rangle < .3$	ระดับต่ำ

ผลการวิจัย

การศึกษาผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แสดงดังนี้

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าการทดสอบที (Independent sample t-test) ของคะแนนแบบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

	กลุ่ม	n	Means	SD	t	df	Sig.
ก่อนเรียน	ทดลอง	28	5.821	1.743	0.791	54	.432
	ควบคุม	28	5.357	2.570			
	กลุ่ม	n	Means	SD	t	df	Sig.
หลังเรียน	ทดลอง	28	12.071	2.448	4.538*	54	.000
	ควบคุม	28	9.107	2.439			

* p-value < .05

จากตารางที่ 5 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของคะแนนหลังเรียนระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ปรากฏว่ากลุ่มทดลองมีคะแนนหลังเรียนเฉลี่ย 12.071 และกลุ่มควบคุมมีคะแนนหลังเรียนเฉลี่ย 9.107 ผลการตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยพบว่า ค่าสถิติทดสอบที เท่ากับ 4.538 df เท่ากับ 54 และ p เท่ากับ .000 สรุปได้ว่ากลุ่มทดลองมีคะแนนความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าการทดสอบที (Independent sample t-test) ของคะแนน N-gain ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

	กลุ่ม	n	Means	SD	t	df	Sig.	ระดับ
คะแนน N-gain	ทดลอง	28	0.640	0.208	5.550*	47.732	.000	ปานกลาง
	ควบคุม	28	0.376	0.142				

* p-value < .05

จากตารางที่ 6 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยคะแนน N-gain ในกลุ่มทดลองเท่ากับ 0.640 อยู่ในระดับปานกลาง และกลุ่มควบคุมเท่ากับ 0.376 อยู่ในระดับปานกลาง ผลการตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคะแนน N-gain พบว่า ค่าสถิติทดสอบที เท่ากับ 5.550 df เท่ากับ 47.732 และ p เท่ากับ .000 สรุปได้ว่ากลุ่มทดลองมีพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาสามารถส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้

ตารางที่ 7 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบก่อนเรียน หลังเรียน และคะแนน N-gain ในแต่ละมุมมองของความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

มุมมอง	กลุ่ม	ก่อนเรียน		หลังเรียน		คะแนน N-gain		ระดับ
		Means	SD	Means	SD	Means	SD	
พื้นฐานความรู้ (B)	ทดลอง	1.857	0.705	3.071*	0.813	0.966*	0.712	สูง
	ควบคุม	1.214	0.738	2.214	0.738	0.401	0.184	ปานกลาง
สถานะเชิงตรรกะ (L)	ทดลอง	1.035	0.428	2.285*	0.535	0.812*	0.455	สูง
	ควบคุม	0.928	0.716	1.928	0.716	0.559	0.245	ปานกลาง
การสรุป (S)	ทดลอง	0.535	0.507	1.571	0.504	0.785*	0.251	สูง
	ควบคุม	0.821	0.669	1.464	0.576	0.446	0.415	ปานกลาง
ลักษณะทั่วไป (G)	ทดลอง	1.178	0.475	2.107*	0.629	0.541*	0.332	ปานกลาง
	ควบคุม	1.250	0.440	1.607	0.567	0.196	0.283	ต่ำ
การนำไปใช้ (A)	ทดลอง	1.214	0.417	3.035*	0.793	0.672*	0.266	ปานกลาง
	ควบคุม	1.142	0.803	1.892	0.832	0.291	0.261	ต่ำ

* p-value < .05

คะแนน N-gain ในตารางที่ 7 แสดงให้เห็นว่ากลุ่มทดลองมีพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ในมุมมองด้านพื้นฐานความรู้ สถานะเชิงตรรกะ และการสรุป อยู่ในระดับสูง ส่วนด้านลักษณะทั่วไปและการนำไปใช้อยู่ในระดับปานกลาง สำหรับทั้งสองกลุ่มมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยที่ด้านพื้นฐานความรู้สถิติทดสอบที่ เท่ากับ 4.058 df เท่ากับ 54 และ p เท่ากับ .000 ด้านสถานะเชิงตรรกะ สถิติทดสอบที่ เท่ากับ 2.590 df เท่ากับ 41.455 และ p เท่ากับ .013 ด้านการสรุปสถิติทดสอบที่ เท่ากับ df เท่ากับ 44.470 และ p เท่ากับ .001 ด้านลักษณะทั่วไป สถิติทดสอบที่ เท่ากับ 4.183 df เท่ากับ 54 และ p เท่ากับ .000 และด้านการนำไปใช้ สถิติทดสอบที่ เท่ากับ 5.405 df เท่ากับ 54 และ p เท่ากับ .000 แสดงให้เห็นว่ากลุ่มทดลองมีพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ในมุมมองด้านพื้นฐานความรู้ สถานะเชิงตรรกะ การสรุป ลักษณะทั่วไป และการนำไปใช้ดีกว่ากลุ่มควบคุม

อภิปรายผลการวิจัย

การศึกษาผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ผู้วิจัยได้ออกแบบการทดลองกับกลุ่มควบคุมโดยการใช้รูปแบบการพิสูจน์เฉพาะแบบความเรียงเป็นย่อหน้า ส่วนกลุ่มทดลองใช้รูปแบบการพิสูจน์แบบความเรียงเป็นย่อหน้า แบบสองคอลัมน์ และแบบใช้ผังงาน ผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่าในช่วงแรกของการจัดการเรียนการสอนความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมไม่มีความแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 หลังจากที่มีการพัฒนาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตพบว่า การใช้รูปแบบการพิสูจน์หลายรูปแบบร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาส่งผลต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมากกว่าการใช้รูปแบบการพิสูจน์ประเภทเดียว อาจเนื่องมาจากในการจัดการเรียนการสอนมีการมุ่งเน้นทั้งงานที่เน้นการอ่านการพิสูจน์โดยใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาและงานที่เน้นการเขียนพิสูจน์ งานที่เน้นการอ่านการพิสูจน์โดยใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาจะส่งเสริมให้นักศึกษาเข้าใจข้อความ สถานะเชิงตรรกะของข้อความ และแนวคิดที่สำคัญของการพิสูจน์ และงานที่เน้นการเขียนจะส่งเสริมให้นักศึกษาสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในข้อเสนอมที่มีบริบทคล้ายกัน สอดคล้องกับผลการวิจัยของ Anwar *et al.* (2021) ที่พบว่างานที่เน้นการอ่านการพิสูจน์และงานที่เน้นการเขียนสามารถพัฒนาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เนื่องจากงานที่เน้นการอ่านการพิสูจน์ช่วยให้ผู้เรียนรับรู้และสามารถระบุสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ สิ่งที่กำหนดให้ และสมบัติที่ใช้ในการพิสูจน์ และทำให้ผู้เรียนสามารถจัดโครงสร้างและแบบแผนการพิสูจน์ได้และงานเชิงการเขียนจะสนับสนุนให้ผู้เรียนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในข้อเสนอมหรือการพิสูจน์ในบริบทอื่น

ในแต่ละมุมมองของความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตด้านพื้นฐานความรู้ สถานะเชิงตรรกะ การสรุป ลักษณะทั่วไป และการนำไปใช้ดีกว่ากลุ่มควบคุม ผู้วิจัยพบว่า 1) พื้นฐานความรู้ (B) นักศึกษามีความเข้าใจเกี่ยวกับข้อเสนอมและข้อสรุป รู้ความหมายของสัญลักษณ์ในข้อความและรูปภาพ รู้ความหมายของสมบัติ และอธิบายความหมายของสมบัติได้ เนื่องมาจากการใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาทำให้นักศึกษาได้ตรวจสอบความถูกต้องการพิสูจน์ ข้อเสนอม การกำหนดสัญลักษณ์ และการใช้สมบัติอย่างละเอียด ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงข้อความของการพิสูจน์กับโครงสร้างความรู้เดิมของตนเอง สอดคล้องกับการศึกษาของ Yang (2012) ที่พบว่า งานที่เน้นการใช้กลยุทธ์การอ่านนั้นเป็นการรวมข้อมูลที่เป็นข้อความเข้ากับโครงสร้างความรู้ที่มีอยู่ก่อนของผู้อ่านและยังเป็นประโยชน์สำหรับการเชื่อมโยงทั้งข้อความพิสูจน์ ตัวเลขหรือหลักฐานและความรู้ของตัวเอง 2) ด้านสถานะเชิงตรรกะ (L) และการสรุป (S) นักศึกษามีการอ้างหลักฐานประกอบการพิสูจน์ที่สมเหตุสมผลในการเชื่อมโยงข้อเสนอมและข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากขั้นที่ 2 การสร้างการพิสูจน์และการใช้กลยุทธ์การอ่าน อาจารย์มีการส่งเสริมให้นักศึกษาสร้างการพิสูจน์ด้วยตนเองโดยกำหนดข้อเสนอมและรูปแบบการพิสูจน์แบบใช้ผังงานให้เป็นปัญหาปลายเปิดซึ่งผู้เรียนจะต้องหาหลักฐานที่มีความสมเหตุสมผลเพื่อเชื่อมโยงข้อเสนอมและข้อสรุปด้วยตนเอง ซึ่งการพิสูจน์แบบใช้ผังงานจะแสดงภาพของสถานะเชิงตรรกะของข้อเสนอม นิยาม สมบัติ ทฤษฎีบท และการสรุปในการพิสูจน์ ทำให้เข้าใจแนวคิดที่สำคัญในการพิสูจน์ การค้นพบนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของ Miyazaki *et al.* (2015) ที่พบว่า การใช้รูปแบบการพิสูจน์แบบใช้ผังงานเพื่อสร้างการพิสูจน์สามารถช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจองค์ประกอบของการพิสูจน์และความสัมพันธ์เชิงตรรกะและช่วยให้ผู้เรียนรับรู้แนวคิดที่สำคัญของการพิสูจน์ นั่นคือ การเชื่อมโยงระหว่างข้อสรุป ข้อความระหว่างกลาง และข้อเสนอมก่อนหน้า แต่เมื่อพิจารณาคะแนนสอบวัดความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนเฉลี่ยในมุมมองด้านการสรุป (S) พบว่าคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มไม่มีความแตกต่างกัน อาจเนื่องมาจากการใช้การพิสูจน์แบบความ

เรียงเป็นย่อหน้า ซึ่งเป็นการเขียนพิสูจน์แบบบรรยายอย่างละเอียด โดยอธิบายขั้นตอนการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลจนนำไปสู่ข้อสรุป ทำให้ผู้เรียนสามารถอธิบายความสอดคล้องเชิงตรรกะหรือแนวคิดที่สำคัญในการพิสูจน์ อีกทั้งยังส่งเสริมให้ผู้เรียนสื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพทั้งวาจาและการเขียน (Brandell, 1994) 3) ด้านลักษณะทั่วไป (G) และการนำไปใช้ (A) นักศึกษาเข้าใจเนื้อหา ความหมายเชิงตรรกะของข้อความและรวบรวมข้อความทั้งหมดเข้าเป็นข้อพิสูจน์ ได้รับความถูกต้องของทฤษฎีบท การระบุสิ่งที่ได้รับจากการพิสูจน์ และนำสิ่งที่ได้รับจากการพิสูจน์นั้นไปประยุกต์ใช้ในบริบทอื่น ๆ ที่มีข้อเสนอที่คล้ายกันได้ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Weber (2015) ที่พบว่า นักศึกษาที่จะประสบผลสำเร็จในการอ่านการพิสูจน์จะต้องพยายามพิสูจน์และอ่านการพิสูจน์ กำหนดขอบเขตในการพิสูจน์ แยกการพิสูจน์ออกเป็นส่วน ๆ การพิสูจน์ที่ยากให้พิสูจน์พร้อมยกตัวอย่าง และเปรียบเทียบวิธีการพิสูจน์ของตนเองกับเพื่อนในชั้นเรียนและอาจารย์ผู้สอน

สรุปผลการวิจัย

การศึกษผลของการใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีต่อความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์หลายรูปแบบร่วมกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาความมีเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่านักศึกษากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์ประเภทเดียว อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่าการสอนโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาสามารถส่งเสริมความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ และนักศึกษากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์หลายรูปแบบร่วมกับกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาที่มีพัฒนาการความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในมุมมองด้านพื้นฐานความรู้ สถานะเชิงตรรกะ การสรุปลักษณะทั่วไป และการนำไปใช้ดีกว่านักศึกษากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์ประเภทเดียว อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงให้เห็นว่าการสอนโดยใช้รูปแบบการพิสูจน์ร่วมกับกับกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาสามารถพัฒนาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการใช้รูปแบบการพิสูจน์แบบใช้ผังงานร่วมกับรูปแบบการพิสูจน์แบบอื่น ๆ ช่วยให้นักศึกษาสามารถเชื่อมโยงเชิงตรรกะขององค์ประกอบต่าง ๆ ในการพิสูจน์ซึ่งมีความสอดคล้องกับบริบทของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ในประเทศไทย เนื่องจากการพิสูจน์ทางเรขาคณิตส่วนใหญ่นิยมนำเสนอในรูปแบบความเรียงเป็นย่อหน้าและสองคอลัมน์ และในขณะที่การอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตการใช้กลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาจะช่วยให้ นักศึกษาสามารถควบคุมอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของตนเองเพื่อไปสู่เป้าหมายของการพิสูจน์ได้ทำให้นักศึกษาสามารถพัฒนาความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ของตนเองและยังส่งเสริมให้นักศึกษาเข้าใจมุมมองของการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และสามารถจัดโครงสร้างและแบบแผนการพิสูจน์ได้

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

- 1) การนำวิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปใช้ผู้สอนควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นตอน และวางแผนการสอนล่วงหน้า
- 2) วิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระยะแรก ๆ ผู้สอนจะต้องแสดงให้เห็นถึงการนำกลยุทธ์การอ่านทางปัญญาและอภิปัญญาไปใช้อย่างไร เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจและใช้กลยุทธ์การอ่านอย่างเหมาะสม
- 3) ควรนำวิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปใช้กับนักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา

ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

- 1) ควรเพิ่มจำนวนกลุ่มตัวอย่างให้มากขึ้นในการวิจัยครั้งต่อไปและใช้สถิติขั้นสูงเพื่อวิเคราะห์ข้อมูล
- 2) ควรมีการพัฒนาวิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพเพื่อศึกษากระบวนการหรือวิธีการสร้างความเข้าใจในการอ่านการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของผู้เรียน

เอกสารอ้างอิง

- Anwar, L., Mali, A. & Goedhart, M. J. (2021). The effect of proof format on reading comprehension of geometry Proof: The case of Indonesian prospective mathematics teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(4), 1-15.
- Brandell, J. (1994). Helping students write paragraph proofs in geometry. *Mathematics Teacher*, 87(7), 498-502.



- Brikshavana, T. (2017). A study of ability and the problems in mathematical proof of Educational Bachelor Degree Students Mathematical Program Suan Dusit University. *Journal of Multidisciplinary in Social Sciences*, 13(2), 167-184. (in Thai)
- Cirillo, M. & Herbst, P. G. (2012). Moving toward more authentic proof practices in geometry. *Mathematics Educator*, 21(2), 11-33.
- Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66(1), 64-74.
- Hake, R. R. (2002). Relationship of individual student normalized learning gains in mechanics with gender, high-school physics, and pretest scores on mathematics and spatial visualization. *Physics Education Research Conference*, 8(1), 1-14
- Klumbut, T. (2013). *The development of activity packages to enhance reasoning ability on reasoning about triangle and quadrangle for Mathayomsuksa 3th students*. Master's Thesis. Naresuan University. (in Thai)
- Ministry of Education. (2019). *Bachelor's Degree qualifications standards department of Education (Four year program) 2019*. (in Thai)
- Miyazaki, M., Fujita, T. & Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. *ZDM-Mathematics Education*, 47(7), 1211-1224
- Program in Mathematics. (2021). Minutes of the meeting for the development of educational quality in Mathematics Program. In *Minutes of the Meeting No.7/21*. 18 June 2021. Loei: Faculty of Education, Loei Rajabhat University. (in Thai)
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 289 – 314.
- Yang, K. L. & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 59-76.
- Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307-326.
- Yang, K. L. & Lin, F. L. (2012). Effects of reading-oriented tasks on students' reading comprehension of geometry proof. *Mathematics Education Research Journal*, 24(2), 215-238.